

Bartosz Jurek*

INWESTYCJE INNOWACYJNE W NIESTACJONARNYM DYNAMICZNYM MODELU LEONTIEFA

Wstęp

W teorii wzrostu endogenicznego jednym z podstawowych czynników decydujących o trwałym długookresowym efekcie wzrostowym gospodarki jest akumulacja wiedzy i postęp technologiczny. Za ich przyczyną procesy produkcyjne stają się coraz bardziej materiałoooszczędne, a otrzymywane w ich wyniku produkty w większym stopniu zaspokajają potrzeby konsumentów i producentów. Aby postęp technologiczny mógł zaistnieć, konieczna jest skuteczna i efektywna działalność jednostek naukowo-badawczych, a także systematyczne wprowadzanie opracowywanych przez nie nowatorskich rozwiązań. Konieczne są inwestycje innowacyjne.

W modelu Leontiefa zakłada się, iż wykorzystywane przez producentów procesy technologiczne nie zmieniają się wraz z upływem czasu. Założenie to pozwala, między innymi w stacjonarnej gospodarce, wskazać ścieżkę najszybszego zrównoważonego wzrostu gospodarczego, zwaną w literaturze *magistralą*. Gra ona także istotną rolę przy dowodach twierdzeń mówiących o zbieżności gospodarki do magistrali (tzw. twierdzeń o *magistrali*). Tymczasem wprowadzenie do rozważań innowacji w oczywisty sposób prowadzi do zmiany stosowanych w gospodarce procesów technologicznych. To z kolei w istotny sposób wpływa na przebieg ścieżki wzrostu gospodarczego, a także na magistralną strukturę produkcji oraz stopę wzrostu. Jednakże, jak wskazano niżej, również i w takich warunkach, oczywiście przy odpowiednich założeniach, efekt magistrali uwidacznia się. Rzecz jasna, dzięki innowacjom osiągnana stopa wzrostu gospodarczego wzrasta.

Artykuł składa się z pięciu części. W części pierwszej przedstawiono szczegółowy opis niestacjonarnego dynamicznego modelu Leontiefa wraz z towarzyszącymi mu założeniami. Część druga poświęcona jest modelowi przedziałami stacjonarnemu, a więc takiemu, w którym

* Autor przygotowuje rozprawę doktorską w Katedrze Ekonomii Matematycznej pod kierunkiem prof. dr hab. Emila Panka.

zmiany technologiczne następują co kilka okresów. W modelu tym zakładamy, że innowacje nie są wprowadzane stopniowo, ale dopiero wówczas, gdy skumulowane inwestycje innowacyjne z kilku okresów osiągną wymaganą wielkość. W części trzeciej artykułu założenie to odrzucamy, pozostając jednak przy modelu przedziałami stacjonarnym. W części czwartej analizujemy model gospodarki z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej. W części piątej wywody teoretyczne ilustrujemy trzema prostymi przykładami numerycznymi. Ostatni fragment artykułu zawiera krótkie podsumowanie oraz wskazuje na kierunki dalszych badań.

1. Model

Przedstawiony model opisuje gospodarkę podzieloną na n gałęzi. W każdej z nich w każdym okresie ustalonego horyzontu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ produkcję utożsamiamy z pewnym (jednym) procesem technologicznym¹. W procesach tych w charakterze nakładów mogą być zużywane produkty pochodzące ze wszystkich gałęzi gospodarki, nie wykluczając zużycia przez poszczególne gałęzie części produkcji własnej. Zakładamy, że nakłady nie wchodzi do procesu produkcji wielokrotnie i wszystkie są zużywane w jednym cyklu produkcyjnym. Dodatkowo przyjmujemy, że nie występują opóźnienia produkcyjne, tzn. wyniki otrzymywane są w całości w jednym cyklu produkcyjnym.

W każdym okresie rozpatrywanego horyzontu czasowego T spełniony jest układ równań²:

$$(E - A(t))x(t) = y(t) = i(t) + c(t), \quad (1)$$

w którym $x(t)$, $y(t)$, $c(t)$ i $i(t)$ oznaczają n -wymiarowe kolumnowe wektory wartości, odpowiednio, produkcji globalnej wytworzonej przez poszczególne gałęzie, produkcji końcowej, konsumpcji i inwestycji w okresie t , wyrażonych w określonych jednostkach pieniężnych

¹ W literaturze znaleźć można również bardziej ogólną postać modelu Leontiefa dopuszczającą możliwość wykorzystywania w każdej gałęzi gospodarki więcej niż jednego procesu technologicznego, zob. np. J. Tsukui, Y. Murakami, *Turnpike Optimality In Input-Output Systems. Theory and Applications for Planning*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford 1978.

² Por. np. E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2000, s. 294.

(w cenach stałych)³, $A(t)$ jest macierzą współczynników nakładów bieżących, której element $a_{ij}(t) \geq 0$ oznacza wyrażony wartościowo niezbędny nakład produkcji pochodzącej z gałęzi i -tej, jaki należy ponieść na wytworzenie jednostki produkcji w gałęzi j -tej w okresie t . Symbolem E oznaczamy (tutaj i wszędzie dalej) macierz jednostkową. Kolumnę i -tą macierzy $A(t)$ oznaczamy symbolem $a^i(t)$ i utożsamiamy z technologią produkcji i -tej gałęzi w okresie t . Aby wykluczyć sytuację, w której pewne produkty wytwarzane są bez ponoszenia nakładów przyjmujemy następujące założenie:

$$(I) \quad \forall t \in T, \forall i \quad a^i(t) \neq 0.$$

Dodatkowo zakładamy, że:

$$(II) \quad \forall t \in T \quad \det(E - A(t)) \neq 0 \quad \text{oraz} \quad (E - A(t))^{-1} > 0^4,$$

co gwarantuje możliwość wytworzenia dodatniej produkcji końcowej przez każdą gałąź gospodarki.

Zgodnie z układem (1) wytworzona produkcja końcowa $y(t)$ dzielona jest na konsumpcję oraz inwestycje. Przyjmować będziemy, że w każdym okresie horyzontu T ustalony jest udział konsumpcji w produkcji końcowej każdej gałęzi. Prawdziwy jest wówczas warunek, zgodnie z którym:

$$c(t) = \Lambda(t)(E - A(t))x(t), \quad (2)$$

gdzie $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ jest diagonalną macierzą, której elementy na głównej przekątnej określają udział konsumpcji w produkcji końcowej w okresie t . Pozostała, nieskonsumowana część produkcji koń-

³ Analiza modelu w jednostkach fizycznych dostarcza tych samych wniosków zmuszając jedynie do niewielkiej modyfikacji warunków (17) i (20), tak by możliwe było wykonanie odpowiednich operacji dodawania. Można tego dokonać np. poprzez wprowadzenie wektora cen.

⁴ Warunek $(E - A(t))^{-1} \geq 0$ wynika z produktywności gospodarki, zob. np. D. Gale, *Teoria liniowych modeli ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1969, s. 334. Silniejszy warunek $(E - A(t))^{-1} > 0$ jest spełniony, np. gdy macierz $A(t)$ jest dodatnia.

cowej przekazywana jest na inwestycje. Celem inwestowania jest umożliwienie wzrostu w kolejnym okresie horyzontu T wytwarzanej w gospodarce produkcji globalnej (a tym samym także i konsumpcji)⁵. Ów wzrost osiągany jest w dwojaki sposób. Po pierwsze część nakładów inwestycyjnych ponoszona jest na rozbudowę aparatu wytwórczego, który jest niezależny od wykorzystywanych w gałęziach technologii produkcji. Są to tzw. inwestycje produkcyjne, o których zakładać będziemy, iż wywołują przyrosty produktu globalnego zgodnie z warunkiem:

$$i^P(t) = B(t)(x(t+1) - x(t)), \quad (3)$$

gdzie $B(t)$ jest macierzą współczynników nakładów inwestycyjnych, której element $b_{ij}(t) \geq 0$ przedstawia niezbędny nakład produkcji pochodzącej z i -tej gałęzi, jaki należy ponieść by wartość produkcji w gałęzi j -tej w okresie $t+1$ móc zwiększyć o jednostkę (przy założeniu, że technologia produkcji w okresie następnym nie ulegnie zmianie). Dalej i -tą kolumnę macierzy $B(t)$ utożsamiać będziemy z technologią inwestowania obowiązującą w i -tej gałęzi w okresie t . O macierzy $B(t)$ zakładamy, że:

$$(III) \forall t \in T \quad \det B(t) \neq 0.$$

Drugą część nakładów inwestycyjnych stanowią tzw. inwestycje innowacyjne, dzięki którym możliwa staje się zmiana w czasie wykorzystywanych w gałęziach technologii (zarówno produkcji, jak i inwestowania). Inwestycje te rozumiemy szeroko, możemy z nimi utożsamiać zarówno ponoszenie nakładów na wdrożenie pewnych istniejących już rozwiązań technologicznych, jak i inwestowanie w badania i rozwój, dzięki czemu nowe technologie zostaną opracowane i dopiero później wdrożone do produkcji. Przyjmować będziemy, że w każdym okresie horyzontu T wielkość tych inwestycji opisuje, podobnie jak w przypadku konsumpcji, równanie:

⁵ Prezentowany model jest tzw. modelem z rocznym cyklem inwestycyjnym. Przykłady modeli, w których inwestycje skutkować mogą po dwu lub więcej okresach (latach) znaleźć można np. w pracach J. Tsukui, Y. Murakami, op.cit., lub W. Jurka, *Magistrala produkcyjna w uogólnionym dynamicznym modelu Leontiefa*, cz. I: *Istnienie Magistrali*, Przegląd Statystyczny 1988, nr 3.

$$i^R(t) = \Gamma(t)(E - A(t))x(t), \quad (4)$$

gdzie $\Gamma(t) = \text{diag}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ jest diagonalną macierzą wskaźników udziału inwestycji innowacyjnych w produkcji końcowej, przy czym spełnione jest założenie, że:

$$(IV) \quad \forall t \in T, \quad \forall i \quad 0 \leq \lambda_i(t) + \gamma_i(t) < 1.$$

Oczywiście, w każdym okresie horyzontu T zachodzi równość:

$$i(t) = i^P(t) + i^R(t). \quad (5)$$

Jeżeli spełnione są założenia (II)-(IV), to dokonując odpowiednich przekształceń przy wykorzystaniu (2)-(5) układ równań (1) zapisać możemy w postaci:

$$x(t+1) = Q(t)x(t), \quad t = 0, 1, \dots, t_1 - 1, \quad (6)$$

gdzie $Q(t) = E + B^{-1}(t)(E - \Lambda(t) - \Gamma(t))(E - A(t))$. Układ równań (6) tworzy niestacjonarny, jednorodny dynamiczny model Leontiefa w wersji dyskretnej, z inwestycjami innowacyjnymi. O macierzy $Q(t)$ zakładamy, że:

$$(V) \quad \forall t \in T \quad \text{macierz } Q(t) \text{ ma } n \text{ różnych rzeczywistych wartości własnych.}$$

Nieujemne rozwiązanie $x(t)$ układu (6) z warunkiem początkowym $x(0) = x^0 > 0$ spełniające warunek:

$$(E - A(t))x(t) \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, t_1,$$

nazywamy dopuszczalną trajektorią produkcji w niestacjonarnym modelu Leontiefa. Jeśli trajektoria ta spełnia ponadto warunek:

$$x(t) = (1 + \delta)^t x^0,$$

gdzie $\delta > 0$, to nazywamy ją stacjonarną trajektorią produkcji ze stopą wzrostu δ .

2. Model przedziałami stacjonarny

Przyjmować będziemy, iż w okresie początkowym $t = 0$ znane są wektory określające minimalne nakłady, jakie należy ponieść, by w gospodarce móc wprowadzać kolejne nowe technologie. Żadna z tych technologii nie może być jednak wdrożona dopóki suma inwestycji innowacyjnych z kolejnych okresów nie osiągnie wymaganego poziomu. Niech zatem R^k oznacza wektor, którego elementy wyznaczają nakłady (według gałęzi ich pochodzenia) wymagane do wprowadzenia w gospodarce k -tej technologii ($k = 1, \dots, s$)⁶. W każdym okresie horyzontu T na nowe technologie przeznaczana jest część produkcji określona wektorem $i^R(t)$. W okresie $t + 1$ wielkość łącznych środków wygosparowanych w gałęziach na potrzeby innowacji przedstawia wektor:

$$R(t+1) = \sum_{\tau=0}^t i^R(\tau). \quad (7)$$

W rozpatrywanym modelu strategia inwestowania w postęp technologiczny przedstawia się następująco:

- w okresie $t = 0$ podejmowana jest decyzja odnośnie wartości wskaźników $\gamma_i(0)$ (decyzja o wielkości środków przeznaczanych na nowe technologie),
- ustalone wskaźniki $\gamma_i(0)$ determinują tempo wzrostu składowych wektora $R(t)$,
- wskaźniki $\gamma_i(0)$ pozostają stałe aż do okresu \tilde{t}^1 , w którym zgromadzone zostaną środki umożliwiające wprowadzenie technologii o numerze $k = 1$,
- w okresie $\tilde{t}^1 + 1$ następuje wdrożenie nowej technologii i rozpoczynają się przygotowania do wprowadzenia technologii o numerze $k = 2$ (powrót do punktu 1).

Powyższa strategia oznacza, że macierze $A(t)$, $B(t)$, $\Gamma(t)$ pozostają stałe pomiędzy kolejnymi innowacjami. Jeżeli dodatkowo założymy, że struktura konsumpcji może się w gospodarce zmieniać jedynie w okresach, w których zmienia się technologia, to również

⁶ Indeks $k = 0$ rezerwujemy dla technologii obowiązującej w gospodarce w okresie początkowym.

i macierz $\Lambda(t)$ pozostawać będzie stała aż do momentu wprowadzenia kolejnej innowacji. W konsekwencji macierz $Q(t)$ zapisać możemy w postaci⁷:

$$Q(t) = \begin{cases} Q^0, & \text{gdy } \min_j \left(\sum_{\tau=0}^t i_j^R(\tau) - R_j^1 \right) < 0, \\ Q^1, & \text{gdy } \min_j \left(\sum_{\tau=0}^t i_j^R(\tau) - R_j^1 \right) \geq 0 \wedge \min_j \left(\sum_{\tau=0}^t i_j^R(\tau) - R_j^1 - R_j^2 \right) < 0, \\ \dots\dots\dots \\ Q^{s-1}, & \text{gdy } \min_j \left(\sum_{\tau=0}^t i_j^R(\tau) - \sum_{k=1}^{s-1} R_j^k \right) \geq 0 \wedge \min_j \left(\sum_{\tau=0}^t i_j^R(\tau) - \sum_{k=1}^s R_j^k \right) < 0, \\ Q^s, & \text{gdy } \min_j \left(\sum_{\tau=0}^t i_j^R(\tau) - \sum_{k=1}^s R_j^k \right) \geq 0. \end{cases}$$

Jeżeli horyzont czasowy T , w którym analizujemy zachowanie gospodarki, jest na tyle długi by możliwe było wprowadzenie wszystkich zaplanowanych innowacji, to można go podzielić na $s+1$ rozłącznych „podhoryzontów” \tilde{T}^k , na przestrzeni których macierz funkcyjna $Q(t)$ pozostaje stała. Innymi słowy:

$$Q(t) = \begin{cases} Q^0 & \text{dla } t \in \tilde{T}^0 = \{\tilde{t}^0, \dots, \tilde{t}^1\}, \\ Q^1 & \text{dla } t \in \tilde{T}^1 = \{\tilde{t}^1 + 1, \dots, \tilde{t}^2\}, \\ \dots\dots\dots \\ Q^s & \text{dla } t \in \tilde{T}^s = \{\tilde{t}^s + 1, \dots, \tilde{t}^{s+1}\}, \end{cases} \quad (8)$$

gdzie $\tilde{t}^0 = 0$, $\tilde{t}^{s+1} = t_1$. Długości horyzontów \tilde{T}^k zależne są oczywiście od wartości wskaźników $\gamma_i(t)$. Im wyższa ich wartość, tym szybciej wprowadzane są innowacje.

W każdym z horyzontów \tilde{T}^k poszukiwać będziemy takiej stacjonarnej trajektorii produkcji, która utrzymując gospodarkę w stanie równowagi dynamicznej zapewnić będzie możliwie najszybszy wzrost produkcji. Rozpatrzmy w tym celu zadanie⁸:

⁷ W podobny sposób zapisać możemy macierze $A(t)$, $B(t)$, $\Gamma(t)$, $\Lambda(t)$.

⁸ Por. np. E. Panek, op.cit., str. 303.

znaleźć $\max \delta$ przy ograniczeniach: (9)

$$x(t+1) = Q^k x(t),$$

$$(E - A^k)x(t) \geq 0, \quad (10)$$

$$x(t) = (1 + \delta)^t x,$$

$$x \neq 0.$$

Zadanie to jest równoważne z zadaniem:

znaleźć $\max \delta$ przy ograniczeniach (11)

$$(1 + \delta)x = Q^k x,$$

$$(E - A^k)x \geq 0, \quad (12)$$

$$x \neq 0.$$

w tym sensie, że para $\{\bar{\delta}, \bar{x}\}$ stanowi rozwiązanie zadania (11)-(12) wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązaniem zadania (9)-(10) jest stopa wzrostu $\bar{\delta}$ oraz trajektoria produkcji postaci $x(t) = (1 + \bar{\delta})^t \bar{x}$ (symbolem A^k oznaczamy macierz $A(t)$ stałą w horyzoncie \tilde{T}^k). Można wykazać, że przy założeniach (II)-(V) zadanie to ma jednoznaczne rozwiązanie, które jest wyznaczone przez największą dodatnią wartość własną macierzy Q^k oraz odpowiadający jej prawy wektor własny⁹.

Oznaczmy przez η_i^k ($i=1, \dots, n$) wartości własne macierzy Q^k w horyzoncie \tilde{T}^k oraz przez h_i^k ($i=1, \dots, n$) odpowiadające im prawe wektory własne tej macierzy. Niech przy tym η_1^k oznacza pierwiastek Frobeniusa macierzy Q^k . Rozwiązaniem zadania (11)-(12) jest wówczas

⁹ Największą co do modułu dodatnią, pojedynczą wartość własną macierzy, której odpowiada co najmniej półdodatni wektor własny, nazywamy pierwiastkiem Frobeniusa, zob. np. J. Tsukui, Y. Murakami, op.cit., s. 9. Przy przyjętych założeniach zadanie (11)-(12) można zapisać w równoważnej postaci:

znaleźć $\max \delta$ przy ograniczeniach:

$$\delta D^k x = x,$$

$$x \neq 0,$$

gdzie $D^k = (Q^k - E)^{-1} \neq 0$. Zadanie to ma rozwiązanie $\bar{\delta} > 0$, $\bar{x} \neq 0$, zob. E. Panek, op.cit., s. 278-280, 304. Pierwiastkiem Frobeniusa macierzy Q^k jest liczba $1 + \bar{\delta}$, zatem produkcja na stacjonarnej trajektorii rośnie z dodatnią stopą $\bar{\delta}$.

para $\{\eta_1^k - 1, h_1^k\}$, a wyznaczoną przez tę trajektorię stacjonarną nazywamy **optymalną stacjonarną trajektorią produkcji**.

Magistralą produkcyjną w przedziałami stacjonarnym modelu Leontiefa w horyzoncie \tilde{T}^k nazywamy półprostą

$$N^k = \{\alpha h_1^k \mid \alpha > 0\}.$$

Przy przyjętych oznaczeniach dopuszczalną trajektorię produkcji w każdym podhoryzoncie \tilde{T}^k przedstawić można w postaci:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i^k (\eta_i^k)^{t-\tilde{t}^k} h_i^k, \quad (13)$$

gdzie c_1^k, \dots, c_n^k są stałymi zależnymi od wektora $x(\tilde{t}^k)$. Oznaczmy dodatkowo przez $\|x\| = \sum_i |x_i|$ normę wektora x . Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

Jeżeli spełnione są założenia (II)-(V), to $\forall k, \forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna l_ε^k , że jeżeli $\tilde{t}^{k+1} - \tilde{t}^k - 1 > l_\varepsilon^k$, wtedy dopuszczalna trajektoria produkcji $x(t)$ w przedziałami stacjonarnym modelu Leontiefa spełnia warunek

$$\left\| \frac{x(t)}{\|x(t)\|} - \frac{h_1^k}{\|h_1^k\|} \right\| < \varepsilon$$

dla $\tilde{t}^k + 1 + l_\varepsilon^k \leq t \leq \tilde{t}^{k+1}$.

Dowód:

Przyjmując oznaczenie

$$x^*(t) = \frac{x(t)}{c_1^k (\eta_1^k)^{t-\tilde{t}^k}}$$

i korzystając z (13) otrzymujemy

$$\forall k, \forall t \in \tilde{T}^k \quad x^*(t) = h_1^k + \sum_{i=2}^n \frac{c_i^k}{c_1^k} h_i^k \left(\frac{|\eta_i^k|}{\eta_1^k} \right)^{t-\tilde{t}^k} = h_1^k + u(t).$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami

$$\forall k \quad \frac{|\eta_i^k|}{\eta_1^k} < 1 \quad (i = 2, \dots, n),$$

zatem $\|u(t)\| \xrightarrow{t} 0$, czyli $x^*(t) \xrightarrow{t} h_1^k$ gdy $t \rightarrow +\infty$, przez co oczywiście również $\|x^*(t)\| \xrightarrow{t} \|h_1^k\|$. Wobec tego $\forall \varepsilon > 0$ znaleźć możemy taką liczbę naturalną l_ε^k , że jeżeli $\tilde{t}^k + 1 + l_\varepsilon^k \leq t \leq \tilde{t}^{k+1}$, to

$$\left\| \frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} - \frac{h_1^k}{\|h_1^k\|} \right\| < \varepsilon.$$

Liczba l_ε^k nie zależy od długości horyzontu \tilde{T}^k , a jedynie od ε . Na koniec wystarczy zauważyć, że $\frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} = \frac{x(t)}{\|x(t)\|}$.

Z przedstawionego twierdzenia wynika, że jeśli tylko stosowana w gospodarce technologia przez pewien czas pozostawać będzie niezmienną, to każda dopuszczalna trajektoria produkcji charakteryzuje się strukturą produkcji zbieżną do struktury magistralnej, czyli takiej, która gwarantuje osiągnięcie najwyższej stopy zrównoważonego wzrostu. Zbieżność ta jest tym widoczniejsza, im dłuższy jest horyzont \tilde{T}^k . Wprowadzenie nowej technologii powoduje co prawda wytrącenie gospodarki z otoczenia starej magistrali, jednak po pewnej liczbie okresów dostosowawczych struktura produkcji ponownie stabilizuje się na poziomie wyznaczonym przez nową magistralę.

3. Uwagi do modelu przedziałami stacjonarnego

W zaprezentowanym w punkcie 1 modelu zakładaliśmy, że w gospodarce technologia nie zmienia się dopóki nakłady poniesione na inwestycje innowacyjne nie osiągną poziomu umożliwiającego przeprowadzenie modernizacji przez wszystkie podmioty gospodarcze jednocześnie. Tymczasem w rzeczywistości zmiana technologii odbywa się zwykle stopniowo, a wprowadzające je przedsiębiorstwa i inne jednostki wytwórcze, nie zwlekają z inwestycjami do czasu, w którym nowe technologie wdrożyć będzie można w całej gałęzi. Może się też okazać, że magazynowanie produktów niektórych gałęzi przez dłuższy czas jest z różnych przy-

czyn niemożliwe. Dalej zaprezentujemy model uchylający wspomniane założenie.

Zakładamy, podobnie jak to miało miejsce w punkcie 1, że w okresie początkowym horyzontu czasowego znane są zarówno technologie (w liczbie $s+1$), które w gospodarce pragnęlibyśmy wdrożyć, jak i wyrażone za pomocą wektorów R^k minimalne nakłady, jakie muszą zostać w tym celu poniesione ($k=1, \dots, s+1$). Dopuszczamy jednak, by inwestycje innowacyjne od razu przynosiły widoczne efekty w postaci stopniowych ulepszeń. Wprowadzanie nowej technologii zostaje zakończone dopiero wtedy, gdy suma inwestycji innowacyjnych ponoszonych w kolejnych okresach osiągnie (lub przekroczy) wymagany poziom. Przyjmujemy przy tym, że każda z wdrażanych technologii będzie wykorzystywana przez pewną liczbę okresów zanim rozpoczęte zostaną kolejne prace modernizacyjne. Horyzont czasowy T możemy wówczas, podobnie jak w punkcie 3, podzielić na $s+1$ rozłącznych podhoryzontów $\tilde{T}^0 = \{\tilde{t}^0, \dots, \tilde{t}^1\}$, $\tilde{T}^1 = \{\tilde{t}^1 + 1, \dots, \tilde{t}^2\}$, ..., $\tilde{T}^s = \{\tilde{t}^s, \dots, \tilde{t}^{s+1}\}$. W każdym z nich wdrażana jest, a następnie przez pewien czas stosowana, nowa technologia. Dodatkowo zakładamy, że wraz z ustabilizowaniem się technologii produkcji struktura konsumpcji również przestaje się zmieniać.

Niech zmiany współczynników $a_{ij}(t)$ i $b_{ij}(t)$, przy wprowadzaniu technologii o numerze k , opisują równania¹⁰:

$$a_{ij}(t) = s^k(t)a_{ij}^{k-1} + (1-s^k(t))a_{ij}^k, \quad (14)$$

$$b_{ij}(t) = s^k(t)b_{ij}^{k-1} + (1-s^k(t))b_{ij}^k, \quad (15)$$

gdzie $s^k(t) \in [0, 1]$ jest wskaźnikiem udziału technologii o numerze $k-1$ w technologii stosowanej w okresie t . Dodatkowo, niech $R^k(t)$ oznacza wektor nakładów innowacyjnych poniesionych do okresu $t-1$ w celu wdrożenia k -tej technologii, skutkujących w okresie następnym. Przyjmijmy oznaczenie:

¹⁰ Por. np. G. Östblom, *Technological Change, Projection of the Technology Matrix and the Hypothesis of Negative Coefficient Changes: Parametric and Non-parametric Tests with Swedish Input-Output Data*, Economic Systems Research 1992, t. 4, n° 3.

$$\tilde{R}^k(t) = \begin{bmatrix} \tilde{R}_1^k(t) \\ \dots \\ \tilde{R}_n^k(t) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

gdzie $\tilde{R}_i^k(t) = R_i^k - R_i^k(t)$, gdy $R_i^k > R_i^k(t)$ oraz $\tilde{R}_i^k(t) = 0$, gdy $R_i^k \leq R_i^k(t)$. Wskaźniki $s^k(t)$ występujące w równaniach (14)-(15), a decydujące o szybkości wprowadzania nowych technologii, w modelu naszym kształtują się następująco:

$$s^k(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{R}_i^k(t)}{\sum_{i=1}^n R_i^k}. \quad (17)$$

Wówczas $s^1(\tilde{t}^0) = 1$ oraz $\forall k \geq 2 \quad s^k(\tilde{t}^{k-1} + 1) = 1$. Zakładamy jednocześnie, że $\forall k \geq 1$ istnieje taki okres $\hat{t}^k \in \tilde{T}^{k-1}$, że $\forall t \in \{\hat{t}^k, \dots, \tilde{t}^k\} \quad s^k(t) = 0$.

Wówczas $\forall t \in \tilde{T}^{k-1} = \{\hat{t}^k, \dots, \tilde{t}^k\} \subset \tilde{T}^{k-1}$ mamy: $A(t) = A^k$, $B(t) = B^k$, $\Lambda(t) = \Lambda^k$, $\Gamma(t) = 0$, a co za tym idzie $Q(t) = Q^k$.

W każdym horyzoncie czasowym \tilde{T}^{k-1} istnieje optymalna stacjonarna trajektoria produkcji, będąca rozwiązaniem zadania (11)-(12) z macierzą $Q(t) = Q^k$. Podobnie jak to miało miejsce w punkcie 1, trajektorię tę wyznacza pierwiastek Frobeniusa macierzy Q^k i odpowiadający mu prawy wektor własny tej macierzy.

Opisany model spełnia warunki twierdzenia 1, a zatem, podobnie jak w punkcie 2, obserwujemy w nim efekt magistrali w każdej fazie ustabilizowania się kolejnej nowej technologii (w podhoryzoncie \tilde{T}^{k-1} , $k = 1, \dots, s+1$). W horyzoncie czasowym T podzielonym na dostatecznie długie podhoryzonty, w których następuje stopniowe wprowadzanie zmian technologicznych, a następnie dochodzi do okresowej stabilizacji technologii, trajektoria produkcji $x(t)$ w każdym podhoryzoncie jest zbieżna do odpowiedniej magistrali. Oczywiście, w miarę zmian technologicznych, w poszczególnych fazach wzrostu magistralna struktura produkcji będzie, ogólnie biorąc, inna.

4. Model niestacjonarny z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej – twierdzenie o magistrali

Założmy, że w początkowym okresie $t = 0$ znana jest w każdej gałęzi pewna technologia wzorcowa, wyznaczająca granicę możliwości poprawy technologii faktycznie w gospodarce wykorzystywanej. Może ona być wyznaczona na przykład na podstawie prognoz opartych na doświadczeniach gospodarek lepiej rozwiniętych. Podobnie jak w punkcie 2, poprawę technologii uzyskuje się w wyniku inwestycji innowacyjnych, które od razu przynoszą widoczne efekty w kolejnych okresach horyzontu T . Oznacza to, że w każdym okresie horyzontu T w macierzy nakładów bieżących $A(t)$ lub macierzy nakładów inwestycyjnych $B(t)$ zmienia się przynajmniej jeden element każdej kolumny odpowiadającej gałęzi, w której planowane jest przeprowadzenie modernizacji. Inaczej niż w modelach prezentowanych wcześniej przyjmować będziemy, że struktura konsumpcji pozostaje niezmienna na przestrzeni całego horyzontu czasowego T , co formalnie oznacza, że¹¹:

$$(VI) \quad \forall t \in T, \forall i \quad \lambda_i(t) = \lambda_i = \text{const} < 1.$$

Zmienność współczynników $a_{ij}(t)$ i $b_{ij}(t)$ opisują podobne do (16)-(17) równania

$$a_{ij}(t) = s(t)\bar{a}_{ij} + (1-s(t))\hat{a}_{ij}, \quad (18)$$

$$b_{ij}(t) = s(t)\bar{b}_{ij} + (1-s(t))\hat{b}_{ij}, \quad (19)$$

gdzie tym razem $s(t) \in (0, 1]$, współczynniki \bar{a}_{ij} i \bar{b}_{ij} opisują technologię obowiązującą w okresie początkowym, natomiast współczynniki \hat{a}_{ij} i \hat{b}_{ij} charakteryzują technologię wzorcową utożsamianą z parą macierzy \hat{A} , \hat{B} .

Dynamikę wskaźnika udziału starej technologii w technologii stosowanej w okresie t w równaniach (18)-(19) opisuje równanie:

¹¹ Założenie to nie jest konieczne. Tutaj zostało przyjęte w celu zapewnienia możliwej prostej struktury modelu.

$$s(t+1) = \frac{s(t)}{1 + \frac{r(t)}{v(t)}} \quad (t = 0, 1, \dots, t_1 - 1), \quad (20)$$

gdzie z założenia $s(0) = 1$, natomiast $r(t) = \sum_{j=1}^n i_j^R(t)$, $v(t) = \sum_{j=1}^n y_j(t)$. Z równania (20) wynika, iż wraz ze wzrostem produkcji końcowej efektywność każdej dodatkowej jednostki pieniężnej przeznaczanej na innowacje jest mniejsza. Tym samym dla utrzymania takiego samego tempa spadku wartości współczynników $a_{ij}(t)$ oraz $b_{ij}(t)$ konieczne jest ponoszenie coraz to większych nakładów na postęp technologiczny. Dla uproszczenia przyjmujemy, że:

(VII) $\forall t \in T \quad \forall i \quad \gamma_i(t) = \gamma_i = \text{const} > 0$.

Przy założeniu (VII) z warunków (18)-(20) wynika, że $A(t) \xrightarrow{t} \hat{A}$, $B(t) \xrightarrow{t} \hat{B}$, gdy $t \rightarrow +\infty$. Wobec niezmienności struktury konsumpcji w niestacjonarnym modelu Leontiefa z technologią asymptotycznie zbieżną do technologii granicznej otrzymujemy: $Q(t) \xrightarrow{t} \hat{Q} = E + \hat{B}^{-1}(E - \Lambda - \Gamma)(E - \hat{A})$. O macierzach \hat{A} , \hat{B} , \hat{Q} zakładamy, że mają te same własności, co macierze $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, tj. że spełniają założenia (II), (III), (V). Łatwo zauważyć, że przy założeniu (VII)

$$\forall t \in T \quad \frac{s(t)}{s(t+1)} = 1 + \frac{r(0)}{v(0)} > 1.$$

Oznaczmy przez $\hat{\eta}_i$ ($i = 1, \dots, n$) wartości własne macierzy \hat{Q} oraz przez \hat{h}^i ($i = 1, \dots, n$) odpowiadające im prawe wektory własne tej macierzy. Niech, podobnie jak dotąd, $\hat{\eta}_1$ oznacza pierwiastek Frobeniusa macierzy \hat{Q} .

Magistralę produkcyjną w niestacjonarnym modelu Leontiefa z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej wyznacza obecnie półprosta:

$$\hat{N} = \{\alpha \hat{h}^1 \mid \alpha > 0\}.$$

Twierdzenie 2

Jeżeli spełnione są założenia (II)-(VII), to $\forall \varepsilon > 0$, istnieje taka liczba naturalna l_ε , że jeżeli $t_1 > l_\varepsilon$, wówczas dopuszczalna trajektoria produkcji $x(t)$ w niestacjonarnym modelu Leontiefa (6) z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej spełnia warunek:

$$\left\| \frac{x(t)}{\|x(t)\|} - \frac{\hat{h}^1}{\|\hat{h}^1\|} \right\| < \varepsilon$$

dla $l_\varepsilon \leq t \leq t_1$. Liczba l_ε nie zależy od t_1 .

*Dowód*¹²:

Oznaczmy przez $\eta_i(t)$ ($i=1, \dots, n$) wartości własne macierzy $Q(t)$, a przez $h^i(t)$ ($i=1, \dots, n$) odpowiadające im prawe wektory własne tych macierzy. Zgodnie z przyjętymi założeniami:

$$\frac{|\hat{\eta}_i|}{\hat{\eta}_1} < 1 \quad (i=2, \dots, n).$$

przy założeniu (V) istnieje taki okres $\tau_0 \in T$, że

$$\forall t \geq \tau_0 \quad \frac{|\eta_i(t)|}{\eta_1(t)} < 1 \quad (i=2, \dots, n). \quad (21)$$

Rozwiązanie ogólne układu (6) zapisać możemy w postaci:

$$x(t) = Z(t)c,$$

gdzie $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ jest rzeczywistym wektorem stałych zależnych od stanu początkowego x^0 , a $Z(t)$ jest fundamentalną macierzą rozwiązań

¹² Dowód twierdzenia wzorowany jest na dowodzie lematu 3 w pracy J. N. Czernyncha, *Analiz powiedienija trajektorii dinamiki narodnochoziajstwiennych modielej*, Nauka, Moskwa 1982, s. 101.

tego układu. Zgodnie z twierdzeniem I. M. Rapoport¹³ istnieje taki okres $\tau_1 < +\infty$, że dla $t \geq \tau_1$ kolumny macierzy $Z(t)$ mają postać:

$$z^i(t) = (\hat{h}^i + r^i(t)) \xi_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (22)$$

gdzie $\xi_i(t) = \prod_{\tau=\tau_1}^t \eta_i(\tau)$ oraz $\lim_{t \rightarrow +\infty} r^i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Wówczas $\forall \sigma > 0$ wybrać możemy taką (zależną od σ) liczbę naturalną τ_2 , że dla $t \geq \tau_2$ wektory $\hat{h}^i + r^i(t)$ należeć będą do σ -otoczeń wektorów \hat{h}^i , $i = 1, \dots, n$.

Niech $x^*(t) = \frac{x(t)}{c_1 \xi_1(t)}$. Ponieważ

$$x(t) = c_1 z^1(t) + c_2 z^2(t) + \dots + c_n z^n(t),$$

więc, zważywszy na (**), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \hat{h}^1 + r^1(t) + \frac{c_2}{c_1} (\hat{h}^2 + r^2(t)) \frac{\xi_2(t)}{\xi_1(t)} + \dots + \frac{c_n}{c_1} (\hat{h}^n + r^n(t)) \frac{\xi_n(t)}{\xi_1(t)} = \\ &= \hat{h}^1 + r^1(t) + u(t). \end{aligned}$$

Zgodnie z (*), $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\tau_3 \geq \max\{\tau_0, \tau_1, \tau_2\}$, że $\forall t \geq \tau_3$ $\|u(t)\| < \varepsilon$, tzn. $u(t) \xrightarrow{t} 0$. Pamiętając, że $r^1(t) \xrightarrow{t} 0$, dochodzimy do warunku: $x^*(t) \xrightarrow{t} \hat{h}^1$, a stąd $\|x^*(t)\| \xrightarrow{t} \|\hat{h}^1\|$. Wobec tego $\forall \varepsilon > 0$ znaleźć możemy taką liczbę naturalną $l_\varepsilon \geq \tau_3$, że:

$$\left\| \frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} - \frac{\hat{h}^1}{\|\hat{h}^1\|} \right\| < \varepsilon$$

dla $l_\varepsilon \leq t \leq t_1$. Liczba l_ε jest przy tym niezależna od długości horyzontu T , a jedynie od ε . Oczywiście $\frac{x^*(t)}{\|x^*(t)\|} = \frac{x(t)}{\|x(t)\|}$, co kończy dowód.

W myśl zaprezentowanego twierdzenia zbieżność dopuszczalnych trajektorii produkcji do magistrali obserwujemy także wtedy, gdy

¹³ Zob. I. M. Rapoport, *O niektórych asymptotycznych metodach w teorii różnicjalnych urawnienij*, AN USSR, Kijów, 1954.

technologia stosowana w poszczególnych gałęziach gospodarki zmienia się na przestrzeni całego, odpowiednio długiego, horyzontu czasowego, dążąc do pewnej technologii wzorcowej. Także w takiej gospodarce osiągnięcie magistralnej struktury produkcji zapewnia jej najszybszy zrównoważony wzrost. Oczywiście, im dłuższy jest horyzont czasowy, tym efekt magistrali staje się widoczniejszy. Należy jednak zauważyć, że w długich horyzontach czasowych założenie o istnieniu technologii wzorcowej może budzić uzasadnione zastrzeżenia.

5. Przykłady numeryczne

Przedstawione wnioski teoretyczne zilustrujemy obecnie za pomocą przykładów numerycznych. Przyjmując odpowiednie dane początkowe dla zaprezentowanych modeli z technologiami przedziałami stacjonarnymi oraz dla modelu niestacjonarnego wyznaczymy odpowiadające im trajektorie produkcji oraz magistrale produkcyjne. Zilustrujemy także towarzyszący im efekt magistrali. Dla prostoty, we wszystkich przykładach zakładamy, że gospodarka podzielona jest na dwie gałęzie, w których dzięki inwestycjom innowacyjnym zmianie ulega zarówno technologia produkcji, jak i technologia inwestowania. W okresie początkowym te technologie są opisane macierzami:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,35 \\ 0,35 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad B^0 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,95 \\ 0,9 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Ponadto, przyjmujemy, że stan początkowy gospodarki opisuje wektor:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

5.1. Model przedziałami stacjonarny

Przedmiotem zainteresowań jest gospodarka w horyzoncie czasowym $T = \{0, \dots, 21\}$,

w którym planowane jest wdrożenie dwóch nowych technologii ($s = 2$).
Znane są:

- macierze współczynników nakładów bieżących:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,35 \\ 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{bmatrix},$$

- macierze współczynników inwestycyjnych

$$B^1 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,95 \\ 0,75 & 0,7 \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,7 \\ 0,75 & 0,5 \end{bmatrix},$$

- macierze współczynników udziału konsumpcji w produkcji końcowej

$$\Lambda^0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^1 = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{bmatrix}, \quad \Lambda^2 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix},$$

- macierze współczynników udziału inwestycji innowacyjnych w produkcji końcowej

$$\Gamma^0 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

- wektory nakładów wymaganych do wdrożenia innowacji (według gałęzi pochodzenia)

$$R^1 = [0,3749 \quad 0,4314], \quad R^2 = [1,2498 \quad 1,0255].$$

Mając powyższe dane wyznaczyć możemy macierze Q^k . Po obliczeniach otrzymujemy:

$$Q^0 = \begin{bmatrix} 0,3288 & 0,789 \\ 0,663 & 0,2712 \end{bmatrix}, \quad Q^1 = \begin{bmatrix} 0,4137 & 0,8197 \\ 0,5282 & 0,3718 \end{bmatrix},$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 0,4178 & 1,0044 \\ 0,7133 & 0,0533 \end{bmatrix}.$$

Dla każdej z nich wyznaczamy wartości własne oraz odpowiadające im prawe wektory własne:

- dla Q^0 : $\eta_1^0 = -0,4239$, $\eta_2^0 = 1,0239$,
 $h_1^0 = [-1,0484 \quad 1]^T$, $h_2^0 = [1,1352 \quad 1]^T$,
- dla Q^1 : $\eta_1^1 = -0,2656$, $\eta_2^1 = 1,0511$,
 $h_1^1 = [-1,2067 \quad 1]^T$, $h_2^1 = [1,286 \quad 1]^T$,
- dla Q^2 : $\eta_1^2 = -0,6303$, $\eta_2^2 = 1,1014$,
 $h_1^2 = [-0,9584 \quad 1]^T$, $h_2^2 = [1,4693 \quad 1]^T$.

Dodatnie wektory własne macierzy Q^k wyznaczają magistralne produkcyjne, natomiast odpowiadające im wartości własne – magistralne

stopy wzrostu. Jak widać, wdrożenie kolejnych innowacji skutkuje zwiększoną stopą wzrostu produkcji.

Dopuszczalną trajektorię produkcji w okresie poprzedzającym wdrożenie technologii $k=1$ wyznaczamy zgodnie ze wzorem (13). Na jej podstawie wyznaczyć możemy również trajektorię inwestycji innowacyjnych, a następnie $\forall t$ współrzędne wektora $R(t)$. Porównując je ze składowymi wektora R^1 zauważamy, że w okresie $t=8$ osiągnięty zostaje wymagany poziom nakładów na inwestycje innowacyjne i wdrożona zostaje nowa technologia ($k=1$). Oznacza to, że od tego okresu dalsze funkcjonowanie gospodarki opisują macierze A^1 , B^1 , Λ^1 oraz Γ^1 . Jej nowy stan początkowy definiuje wektor $x(7)$. W kolejnym kroku wyznaczamy segment trajektorii produkcji, inwestycji innowacyjnych oraz wektory $R(t)$ odpowiadające technologii $k=1$. Z ich analizy wynika, że druga innowacja zostaje wdrożona w gospodarce w okresie $t=15$. Od tego okresu jej funkcjonowanie opisują macierze A^2 , B^2 , Λ^2 oraz Γ^2 (ponieważ nie są planowane dalsze innowacje, więc $\Gamma^2=0$). Podobnie jak poprzednio wyznaczamy kolejny segment trajektorii produkcji (aż do okresu końcowego $t=21$) zgodnie ze wzorem (13), przyjmując w charakterze stanu początkowego wektor $x(14)$. Przebieg trajektorii produkcji w całym horyzoncie T ilustruje wykres 1. Wyniki obliczeń zawiera tabela 1.

Na wykresie 1 pionowymi przerywanymi liniami zaznaczono ostatnie okresy przed wprowadzeniem innowacji. Widać, że w miarę wdrażania kolejnych technologii stopa wzrostu produkcji rośnie. Widoczne są również wahania struktury produkcji towarzyszące zmianom technologicznym w gospodarce. Wahania te w dokładniejszy sposób ilustruje wykres 2, na którym oprócz zmian w strukturze produkcji gałęzi 1 zaznaczona została także struktura magistralna. W każdym podhoryzoncie, w którym technologia pozostaje stała, struktura produkcji zbieżna jest do struktury magistralnej. Wykres 2 ilustruje tym samym efekt magistrali sformułowany w twierdzeniu 1. Oczywiście, analizując strukturę produkcji gałęzi 2 uzyskano by dokładnie takie same wnioski. Suma współrzędnych wektora struktury produkcji wszystkich gałęzi zawsze jest równa jedności, zatem w gospodarce, w której wyróżniamy tylko dwie gałęzie nie ma potrzeby analizowania każdej z nich z osobna.

Z tego też powodu tutaj i wszędzie dalej ograniczymy się do wykresów i tabel opisujących funkcjonowanie gałęzi 1.

Tabela 1

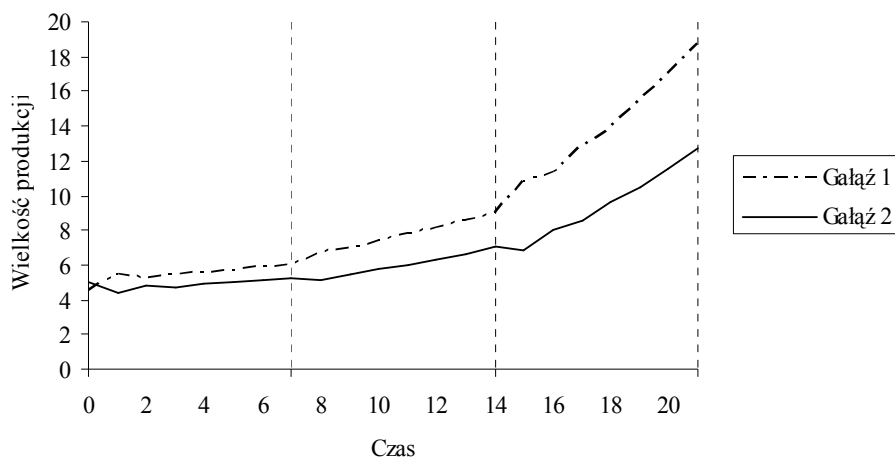
**Trajektorie produkcji i skumulowane inwestycje innowacyjne
w modelu przedziałami stacjonarnym**

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$R_1(t)$	$R_2(t)$
0	4,500000	5,000000	-	-
1	5,424658	4,339726	0,005000	0,092500
2	5,207671	4,773699	0,070096	0,119623
3	5,478755	4,747541	0,111323	0,176040
4	5,547240	4,920179	0,164310	0,221660
5	5,705974	5,012410	0,213993	0,273516
6	5,830934	5,142669	0,266797	0,324427
7	5,974797	5,260850	0,320041	0,377478
8	6,783724	5,111876	0,374904	0,431403
9	6,996249	5,483767	0,535174	0,551322
10	7,388989	5,734291	0,693055	0,685585
11	7,756800	6,034882	0,861804	0,824520
12	8,155336	6,340919	1,038423	0,971128
13	8,571046	6,665211	1,224258	1,125068
14	9,008824	7,005362	1,419528	1,286907
15	10,800180	6,799914	1,624781	1,456999
16	11,342210	8,066793	1,624781	1,456999
17	12,841170	8,521007	1,624781	1,456999
18	13,923630	9,614488	1,624781	1,456999
19	15,474200	10,444960	1,624781	1,456999
20	16,956170	11,595330	1,624781	1,456999
21	18,730770	12,713820	1,624781	1,456999

Źródło: obliczenia własne.

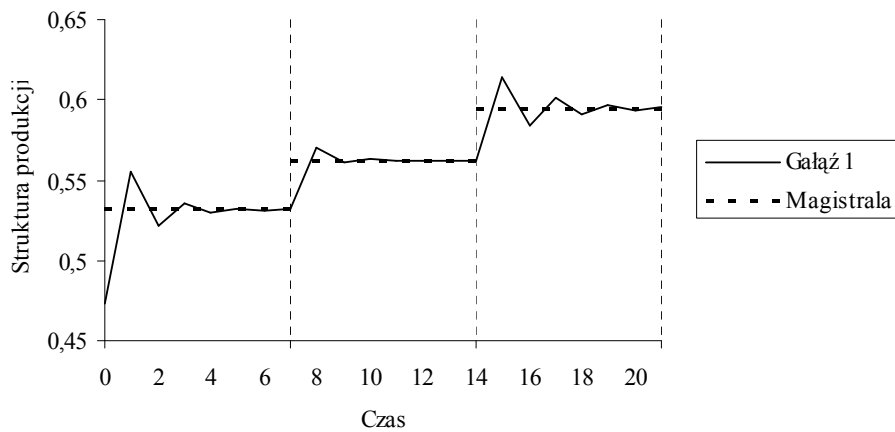
W tabeli 2 przedstawiona została struktura produkcji wytwarzanej w gospodarce, struktura magistralna oraz różnica między obiema tymi wielkościami. Wartość ujemna różnicy oznacza, że struktura magistralna wskazuje na udział produkcji gałęzi 1 w produkcji ogółem wyższy od faktycznie osiąganego. Dodatnia wartość natomiast oznacza produkcję przewyższającą poziom magistralny. Podobnie jak na wykresie 2, widać, że struktura produkcji z upływem czasu zbliża się do struktury magistralnej. Wdrożenie nowych technologii powoduje wytrącenie gospodarki z otoczenia magistrali, jednak już po kilku okresach obserwu-

jemy jej ponowną zbieżność do nowej magistrali, dostosowanej do nowej optymalnej struktury produkcji.



Wykres 1. Trajektorie produkcji w modelu przedziałami stacjonarnym

Źródło: obliczenia własne.



Wykres 2. Zbieżność struktury produkcji wytwarzanej w gałęzi 1 do magistrali

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2

Zbieżność struktury produkcji wytwarzanej w gałęzi 1 do magistrali

t	Struktura produkcji gałęzi 1	Struktura magistralna	Różnica
0	0,473684	0,531651	-0,057967
1	0,555556	0,531651	0,023905
2	0,521739	0,531651	-0,009912
3	0,535752	0,531651	0,004101
4	0,529953	0,531651	-0,001698
5	0,532354	0,531651	0,000703
6	0,531360	0,531651	-0,000291
7	0,531771	0,531651	0,000120
8	0,570272	0,562551	0,007721
9	0,560596	0,562551	-0,001954
10	0,563044	0,562551	0,000494
11	0,562426	0,562551	-0,000125
12	0,562582	0,562551	0,000031
13	0,562543	0,562551	-0,000008
14	0,562553	0,562551	0,000002
15	0,613643	0,595022	0,018621
16	0,584379	0,595022	-0,010643
17	0,601117	0,595022	0,006095
18	0,591535	0,595022	-0,003486
19	0,597018	0,595022	0,001996
20	0,593880	0,595022	-0,001142
21	0,595676	0,595022	0,000654

Źródło: obliczenia własne.

5.2. Model przedziałami stacjonarny z umiarkowanymi zmianami technologicznymi

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, prześledzimy gospodarke, w której planowane jest wdrożenie dwóch nowych technologii. Technologie te utożsamiamy z tymi samymi co poprzednio macierzami nakładów bieżących $\hat{A}^1 = A^1$, $\hat{A}^2 = A^2$ oraz macierzami nakładów inwestycyjnych $\hat{B}^1 = B^1$, $\hat{B}^2 = B^2$. Dla uproszczenia przyjmujemy, że udział konsumpcji w produkcji końcowej jest stały na przestrzeni całego horyzontu czasowego $T = \{0, \dots, 20\}$:

$$\Lambda(t) = \Lambda = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Zakładać będziemy również, że aż do całkowitego wdrożenia innowacji niezmiennie pozostawać będą macierze współczynników udziału inwestycji innowacyjnych w produkcji końcowej, przy czym:

$$\Gamma^1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{bmatrix} 0,15 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{bmatrix}.$$

W okresie początkowym znane są wektory nakładów wymaganych do wdrożenia innowacji (według gałęzi pochodzenia):

$$R^1 = [0,3 \quad 0,3], \quad R^2 = [2 \quad 2],$$

a wdrażanie drugiej technologii rozpoczyna się w okresie $t = 11$.

Wiemy, że magistrała wskazuje na optymalną strukturę produkcji, jaką można osiągnąć przy wykorzystaniu nowej technologii. Oznacza to, że w horyzoncie $\{0, \dots, 10\}$ magistrałę wyznaczamy na podstawie macierzy A^1 , B^1 , $\hat{\Lambda}$ i $\Gamma = 0$, natomiast w horyzoncie $\{11, \dots, 20\}$ korzystając z macierzy A^2 , B^2 , $\hat{\Lambda}$ i $\Gamma = 0$. Macierze Q^k mają wówczas postać:

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 0,3288 & 0,789 \\ 0,663 & 0,2712 \end{bmatrix}, \quad Q^2 = \begin{bmatrix} 0,4137 & 0,8197 \\ 0,5282 & 0,3718 \end{bmatrix}.$$

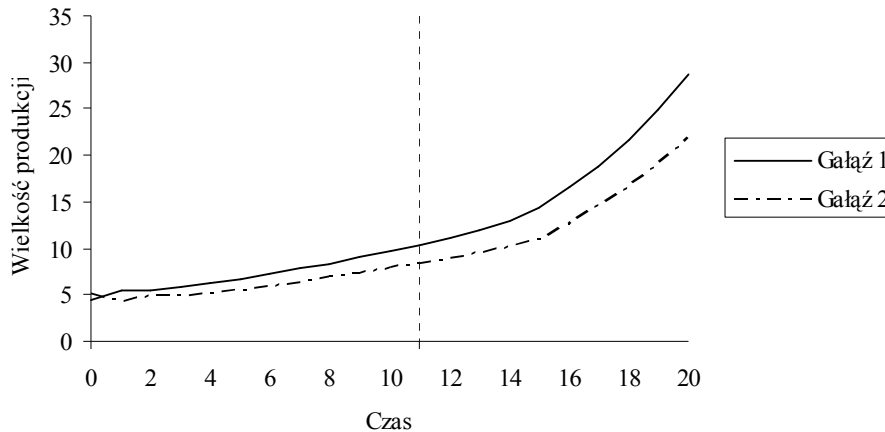
Wyznaczając ich wartości własne oraz odpowiadające im prawe wektory własne otrzymujemy:

- dla \hat{Q}^1 : $\hat{\eta}_1^1 = -0,963$, $\hat{\eta}_2^1 = 1,0784$,
 $\hat{h}_1^1 = [-1,1835 \quad 1]^T$, $\hat{h}_2^1 = [1,229 \quad 1]^T$,
- dla \hat{Q}^2 : $\hat{\eta}_1^2 = -0,9956$, $\hat{\eta}_2^2 = 1,1479$,
 $\hat{h}_1^2 = [-0,965 \quad 1]^T$, $\hat{h}_2^2 = [1,3084 \quad 1]^T$.

Obserwując wyliczone stopy wzrostu łatwo zauważyć, że wraz z nowymi technologiami wzrost produkcji jest coraz szybszy.

Trajektorię produkcji w analizowanej gospodarce wyznaczamy postępując analogicznie jak w przykładzie poprzednim. Należy tylko pamiętać, że obecnie aż do całkowitego wdrożenia innowacji macierze $A(t)$ oraz $B(t)$, a co za tym idzie także i $Q(t)$, mogą zmieniać się w każdym okresie. Pociąga to za sobą konieczność obliczania dla każdego okresu nie tylko składowych wektora $\tilde{R}^k(t)$, ale także wskaźnika

$s^k(t)$. Wyniki przeprowadzonych obliczeń zawiera tabela 3. W ujęciu graficznym przebieg wyznaczonych trajektorii produkcji w rozpatrywanej gospodarce prezentuje wykres 3.



Wykres 3. Trajektorie produkcji w modelu przedziałami stacjonarnym z umiarkowanymi zmianami technologicznymi

Źródło: obliczenia własne.

W okresie $t = 11$, oznaczonym na wykresie 3 pionową przerywaną linią, rozpoczyna się wdrażanie w gospodarce drugiej technologii. Jednak wyraźna różnica w tempie wzrostu produkcji uwidacznia się dopiero około okresu $t = 15$. Dopiero wtedy bowiem udział nowej technologii w technologii istniejącej w gospodarce jest na tyle duży, by mogła ona wzrastać znacząco szybciej.

Wykres 4 ilustruje efekt magistrali w analizowanej gospodarce. Pomimo stopniowego wprowadzania zmian technologicznych (i związanego z tym braku stabilności technologii) zbieżność struktury produkcji do struktury magistralnej jest wyraźnie widoczna. Świadczą o niej także zamieszczone w tabeli 4 wyniki przeprowadzonych obliczeń. Podobnie jak w przykładzie poprzednim, wytrącenie gospodarki z otoczenia magistrali, spowodowane zmianą technologii, nie jest trwałe i już po kilku okresach struktura produkcji stabilizuje się na nowym poziomie odpowiadającym nowej magistrali.

Tabela 3

Trajektorie produkcji i zmienność wskaźnika $s(t)$ w modelu przedsiębiorstwami stacjonarnym z umiarkowanymi zmianami technologicznymi

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$\tilde{R}_1^k(t)$	$\tilde{R}_2^k(t)$	$s^k(t)$
0	4,500000	5,000000	0,300000	0,300000	1,000000
1	5,515536	4,320924	0,295000	0,207500	0,837500
2	5,367355	4,798926	0,216648	0,171053	0,646169
3	5,865123	4,795298	0,150925	0,090478	0,402338
4	6,197378	5,088866	0,049102	0,003411	0,087522
5	6,739941	5,439661	0	0	0
6	7,213424	5,912245	0	0	0
7	7,831488	6,331061	0	0	0
8	8,394497	6,870146	0	0	0
9	9,101294	7,367272	0	0	0
10	9,767511	7,984452	0	0	0
11	10,335108	8,395674	2,000000	2,000000	1,000000
12	11,042873	8,861801	1,665640	1,680378	0,836504
13	11,898323	9,430340	1,270069	1,303563	0,643408
14	12,967927	10,122445	0,797125	0,852354	0,412370
15	14,332302	10,988514	0,222123	0,303760	0,131471
16	16,494017	12,571440	0	0	0
17	18,893147	14,473949	0	0	0
18	21,729261	16,572914	0	0	0
19	24,903294	19,067053	0	0	0
20	28,628228	21,845929	0	0	0

Źródło: obliczenia własne.

5.3. Model niestacjonarny z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej

Zakładamy, że technologię wzorcową, do której dąży gospodarka, opisują macierze $\hat{A} = A^2$ oraz $\hat{B} = B^2$. Macierz wskaźników udziału konsumpcji w produkcji końcowej pozostaje stała na przestrzeni całego horyzontu czasowego $T = \{0, \dots, 15\}$ i ma postać:

$$\Lambda(t) = \Lambda = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Stała w czasie jest też macierz wskaźników udziału inwestycji innowacyjnych w produkcji końcowej:

$$\Gamma(t) = \Gamma = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że wskaźniki udziału starej technologii w technologii istniejącej w gospodarce zmieniać się będą zachowując zależność:

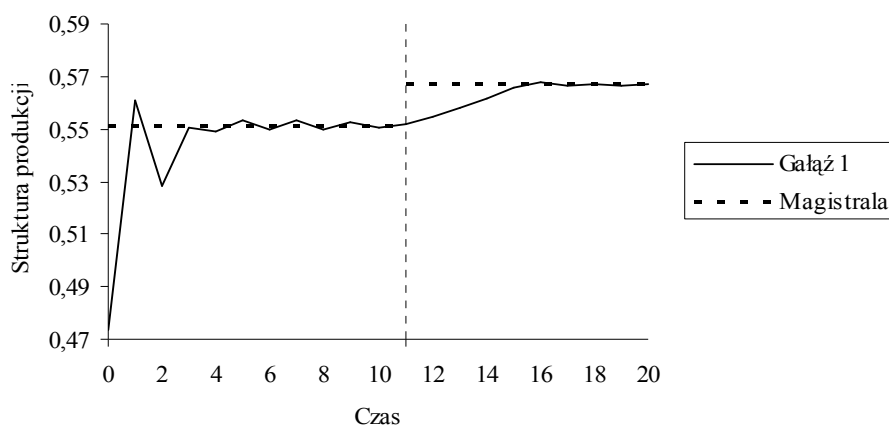
$$\frac{s(t)}{s(t+1)} = 1,3.$$

Tabela 4

Zbieżność struktury produkcji wytworzonej w gałęzi 1 do magistrali

t	Struktura produkcji gałęzi 1	Struktura magistralna	Różnica
0	0,473684	0,551366	-0,077681
1	0,560724	0,551366	0,009358
2	0,527957	0,551366	-0,023409
3	0,550177	0,551366	-0,001188
4	0,549109	0,551366	-0,002256
5	0,553379	0,551366	0,002014
6	0,549566	0,551366	-0,001799
7	0,552972	0,551366	0,001606
8	0,549931	0,551366	-0,001434
9	0,552646	0,551366	0,001281
10	0,550221	0,551366	-0,001144
11	0,551771	0,566805	-0,015033
12	0,554788	0,566805	-0,012016
13	0,557856	0,566805	-0,008948
14	0,561616	0,566805	-0,005188
15	0,566028	0,566805	-0,000776
16	0,567478	0,566805	0,000673
17	0,566221	0,566805	-0,000584
18	0,567311	0,566805	0,000507
19	0,566366	0,566805	-0,000439
20	0,567186	0,566805	0,000381

Źródło: obliczenia własne.



Wykres 4. Zbieżność struktury produkcji wytworzonej w gałęzi 1 do magistrali

Źródło: obliczenia własne.

Tym razem magistrala produkcyjna w naszym modelu wskazuje na optymalną strukturę produkcji i stopę wzrostu, jaką można osiągnąć wykorzystując w gospodarce technologię wzorcową. Poszukując magistrali wyznaczyć musimy wartości własne oraz odpowiadające im prawe wektory własne macierzy:

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0,6533 & 0,5244 \\ 0,44 & 0,4933 \end{bmatrix}.$$

Wykonując niezbędne obliczenia otrzymujemy:

$$\hat{\eta}_1 = 0,0863, \quad \hat{\eta}_2 = 1,0603,$$

$$\hat{h}_1 = [-0,925 \quad 1]^T, \quad \hat{h}_2 = [1,2886 \quad 1]^T.$$

Trajektorie produkcji wyznaczamy podobnie jak we wcześniejszych przykładach. Ich przebieg ilustruje wykres 5 oraz dane zawarte w tabeli 5.

W prezentowanym modelu niestacjonarnym z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej także ujawnia się efekt magistrali. Ilustruje go wykres 6 oraz tabela 6. Oczywiście, ze względu na ciągłą i stosunkowo powolną zmianę technologii zbieżność struktury produkcji do magistrali nie jest tak szybka, jak we wcześniejszych przykładach. Tym niemniej jest ona wyraźna i świadczy o tym, że mimo niemożności osiągnięcia technologii wzorcowej, dzięki inwestycjom

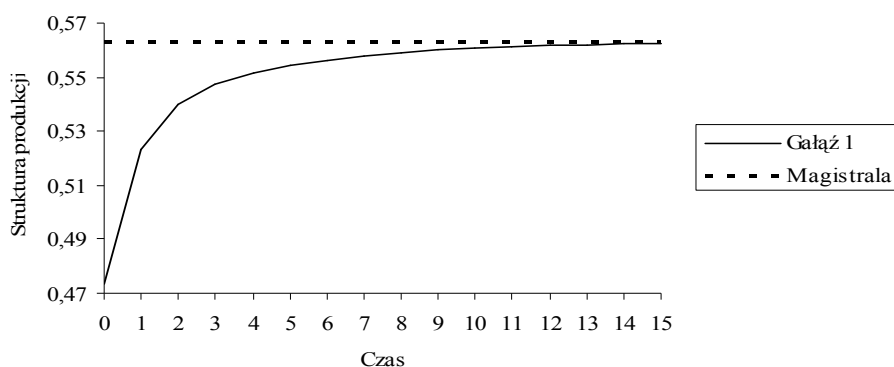
innowacyjnym już po kilku okresach struktura produkcji w gospodarce jest zbliżona do struktury optymalnej. Długość fazy dochodzenia do otoczenia magistrali jest przy tym, co oczywiste, zależna od wielkości nakładów na modernizację.

Tabela 5

Trajektorie produkcji i zmienność wskaźnika $s(t)$ w modelu niestacjonarnym z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$s(t)$
0	4,500000	5,000000	1,000000
1	5,080449	4,632935	0,769231
2	5,398898	4,598086	0,591716
3	5,665328	4,686617	0,455166
4	5,940464	4,833219	0,350128
5	6,239418	5,018593	0,269329
6	6,565597	5,236323	0,207176
7	6,919886	5,483573	0,159366
8	7,302786	5,758779	0,122589
9	7,714870	6,061065	0,094299
10	8,156883	6,390039	0,072538
11	8,629759	6,745699	0,055799
12	9,134624	7,128359	0,042922
13	9,672793	7,538603	0,033017
14	10,245764	7,977253	0,025398
15	10,855214	8,445339	0,019537

Źródło: obliczenia własne.



Wykres 6. Zbieżność struktury produkcji wytworzonej w gałęzi 1 do magistrali

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 6

Zbieżność struktury produkcji wytworzonej w gałęzi 1 do magistrali

t	Struktura produkcji gałęzi 1	Struktura magistralna	Różnica
0	0,473684	0,563053	-0,089368
1	0,523036	0,563053	-0,040016
2	0,540053	0,563053	-0,022999
3	0,547272	0,563053	-0,015781
4	0,551387	0,563053	-0,011666
5	0,554220	0,563053	-0,008832
6	0,556316	0,563053	-0,006736
7	0,557899	0,563053	-0,005153
8	0,559105	0,563053	-0,003947
9	0,560025	0,563053	-0,003027
10	0,560729	0,563053	-0,002323
11	0,561268	0,563053	-0,001784
12	0,561682	0,563053	-0,001371
13	0,561999	0,563053	-0,001053
14	0,562243	0,563053	-0,000809
15	0,562430	0,563053	-0,000622

Źródło: obliczenia własne.

Podsumowanie

Jedną z najczęściej wskazywanych wad modelu Leontiefa jest przyjmowane w nim powszechnie założenie o stałości technologii wytwarzania i inwestowania. Dążąc do złagodzenia tego założenia wprowadziliśmy do modelu inwestycje innowacyjne, dzięki którym możliwa staje się modernizacja każdej gałęzi gospodarki. W sumie zaprezentowaliśmy dwie wersje modelu Leontiefa: przedziałami stacjonarną oraz niestacjonarną z technologią zbieżną asymptotycznie do technologii granicznej. W obu przypadkach, niezależnie od stanu początkowego, również w niestacjonarnej gospodarce w odpowiednio długim horyzoncie czasu ścieżki wzrostu charakteryzują się strukturą produkcji zbieżną do struktury magistralnej, przy której gospodarka osiąga maksymalne tempo wzrostu.

W pracy zakładaliśmy m.in., że wielkości wskaźników $\gamma_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, ustalających udział inwestycji innowacyjnych poszczególnych gałęzi w ich produkcji końcowej, kształtują się w sposób egzogeniczny, tzn. nie objaśniony modelem. W dalszych badaniach należałoby nadać

zmienności tych współczynników charakter endogeniczny. Można tego dokonać, np. formułując w ramach obu analizowanych w pracy modeli zadanie wyznaczenia takich wielkości $\gamma_i(t)$, które gwarantują w całym horyzoncie T maksymalizację wartości produkcji bądź konsumpcji. Na podstawie modelu Leontiefa z inwestycjami innowacyjnymi, możliwe byłoby wówczas również formułowanie długookresowych planów gospodarczych. Model Leontiefa w swej klasycznej postaci przedstawia oczywiście uproszczony obraz rzeczywistości. By był on pełniejszy, należałoby uwzględnić w nim także takie istotne dla gospodarki wielkości i procesy, jak zatrudnienie, majątek produkcyjny, majątek innowacyjny, deprecjacja obu rodzajów majątku, międzygałęziowe przepływy wiedzy i kapitału ludzkiego, wymiana zagraniczna czy pozostająca całkowicie poza klasycznym pierwowzorem cała sfera przepływów pieniężnych w gospodarce. Zaprezentowane warianty niestacjonarnego dynamicznego modelu Leontiefa z inwestycjami innowacyjnymi stanowią zaledwie skromny przyczynek, ale jednocześnie, jak się wydaje, dobre odniesienie do dalszych uogólnień i analiz.

Innovative investment in a non-stationary dynamic Leontief model

Summary

One of the most important factors determining the long-run economic growth rate is undoubtedly technological progress. Introduction of new technologies and continuous improvement of production and management processes very often decide about the success or fail in the strongly competitive market. The lust for survival makes the producers look for new and better solutions, makes them invest more and more in innovations. In the whole economy the volume of this investment reaches the level which forces the economists to include it into the study of economic growth.

The article presents two input-output models in which some of produced goods can be invested in new technologies letting the whole economy to innovate its production processes. In one of them it is assumed that introduction of each of the innovations requires reaching a suitable level of investment. This means in fact that if the time horizon is long enough it can be divided into a number of intervals for which the technology remains unchanged. In the latter model the technology used

in the economy is asymptotically convergent to a specific model technology and it can change in every period of a time horizon. For both models turnpike theorems are formulated and proved. According to them even in non-stationary systems under suitable assumptions the paths of growth are convergent to the paths indicating the greatest possible rate of balanced growth regardless of the initial state of the economy.

The models presented in the article are rather simplified. To make them describe economic reality more precisely one should include into the analysis such phenomena and quantities like employment, capital and its depreciation, technology spillovers or human capital. However, both models described in the article can be good starting points for further generalizations and studies.

Bibliografia

Craven J. [1983], *Input-Output and Technical Change*, *Econometrica*, t. 51, n° 3.

Czeremnych J. N. [1982], *Analiz powiedienija trajektorii dinamiki narodnochoziajstwiennych modielej*, Nauka, Moskwa.

Czerwiński Z. [1973], *Podstawy matematycznych modeli wzrostu gospodarczego*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Gale D. [1969], *Teoria liniowych modeli ekonomicznych*, PWN, Warszawa.

Jurek W. [1988], *Magistrala produkcyjna w uogólnionym dynamicznym modelu Leontiefa*, cz. I: *Istnienie Magistrali*, *Przegląd Statystyczny*, nr 3.

Jurek W., Kiedrowski, R., Panek, E. [1992], *Magistrale w systemach typu input-output*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

McKenzie L. W. [1998], Turnpikes, *American Economic Review*, t. 88, n° 2.

Östblom G. [1992], *Technological Change, Projection of the Technology Matrix and the Hypothesis of Negative Coefficient Changes: Parametric and Non-parametric Tests with Swedish Input-Output Data*, *Economic Systems Research*, t. 4, n° 3.

Panek E. [2000], *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Rapoport I. M. [1954], *O niekatorych asimptoticzeskich mietodach w teorii diffieren-cjalnych urawnienij*, AN USSR, Kijów.

Tsukui J., Murakami Y. [1978], *Turnpike Optimality In Input-Output Systems. Theory and Applications for Planning*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.