Piotr Wróblewski[*]

OPTYMALNE PROCESY WZROSTU W DWUCZYNNIKOWEJ, JEDNOSEKTOROWEJ GOSPODARCE Z LINIOWĄ FUNKCJĄ PRODUKCJI I ZMIENNĄ EFEKTYWNOŚCIĄ CZYNNIKÓW

Wstęp

Wzrost gospodarczy jest jednym z najważniejszych celów zarówno makroekonomicznych, jak i polityki społeczno-gospodarczej. Przywódcy krajów stają przed zadaniem takiego kierowania państwem, aby zapewnić społeczeństwu jak największy dobrobyt. Jest to problem złożony, bo już sama definicja pojęcia ‘dobrobyt‘ nie jest oczywista i rodzi wiele kontrowersji.

Najczęściej stosowanym wskaźnikiem jakości życia ludności jest produkt krajowy brutto per capita. Uwzględnia on wszystkie dochody uzyskane przez reprezentatywnego obywatela, niezależnie od ich późniejszej alokacji. Część tych dochodów jest wydawana na szeroko pojętą konsumpcję, część na inwestycje, związane z oczekiwaniem większych zysków i większej konsumpcji w przyszłości. Rozdysponowanie środków jest podstawowym zadaniem ich właściciela, które musi rozwiązać w warunkach ograniczonej wiedzy i niepewności co do przyszłości. Ciągi podejmowanych decyzji tworzą dopuszczalne procesy wzrostu, wśród których wyróżnić można procesy optymalne ze względu na określone kryteria.

Modelowanie gospodarki i procesów wzrostu w języku matematycznym wymaga przyjęcia wielu założeń uproszczających. Model często ma na celu nie tyle pomóc w znalezieniu gotowej recepty działania, co ilustrację problemu i zasygnalizowanie pewnych istotnych kwestii przy podejmowaniu decyzji w rzeczywistości.

W pracy przedstawiono dwie wersje modelu zamkniętej (z zerowym bilansem obrotów z zagranicą) gospodarki jednosektorowej (w której wytwarzany jest jeden produkt – agregat), dwuczynnikowej (czynni-

---

[*] Autor przygotowuje rozprawę doktorską w Katedrze Ekonomii Matematycznej pod kierunkiem prof. dr hab. Emila Panka.

kami produkcji są majątek produkcyjny i praca[1]), z liniową funkcją produkcji (przyrosty produkcji wynikające z jednostkowego zwiększenia nakładu czynnika są jednakowe przy każdym poziomie jego zaangażowania), funkcjonującej w ograniczonym horyzoncie z czasem ciągłym. W każdej z wersji zakładamy zmienność krańcowej produktywności jednego z czynników wytwórczych[2], pozostałe założenia w obu wersjach modelu są identyczne. Kryterium optymalności procesów wzrostu jest maksymalizacja konsumpcji w całym horyzoncie. Zmienną decyzyjną jest stopa inwestycji, a jej trajektorii poszukujemy w klasie funkcji przynajmniej przedziałami ciągłych, ze skończoną liczbą punktów nieciągłości pierwszego rodzaju[3].

1. Jednosektorowy model wzrostu z dwuczynnikową liniową funkcją produkcji i zmienną efektywnością kapitału

Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem rozważań będzie gospodarka funkcjonująca w horyzoncie $T=\left[t_0,t_1\right]$,w której proces produkcji opisuje dwuczynnikowa, liniowa funkcja produkcji:

$$y(t)=a(t)k(t)+bz(t), \tag{1}$$

gdzie $y(t)$, $k(t)$, $z(t)$ oznaczają, odpowiednio, dochód, kapitał i zatrudnienie w momencie t, $a(t)$ jest efektywnością kapitału w momencie t, natomiast b jest stałym współczynnikiem wydajności pracy[4]. Po wytworze-

[1] Określenie *kapitał* będzie stosowane zamiennie wobec *majątku produkcyjnego*.

[2] Terminy *krańcowa produktywność, wydajność i efektywność* traktowane są w pracy zamiennie. Mówiąc o zmianie efektywności czynnika produkcji mamy na myśli zarówno jej wzrost, jak i spadek. Ujemny przyrost efektywności, choć niepożądany, może wystąpić w realnej gospodarce, choćby z powodu braku odpowiedniej motywacji do pracy. W przedstawionych modelach zakładamy dla uproszczenia, że efektywność czynników wraz z upływem czasu nigdy nie maleje, tym samym jej zmianę będziemy utożsamiać ze wzrostem.

[3] Klasę tę oznaczać będziemy przez $\tilde{C}^0$, natomiast klasę funkcji z dodatkowo ciągłą przedziałami pochodną przez $\tilde{C}^1$.

[4] Przyjmujemy, że dochód (utożsamiany tutaj z produkcją nowo wytworzoną) i kapitał mają wymiar pieniężny, natomiast miarą pracy jest liczba zatrudnionych. Wtedy efektywność kapitału jest wielkością niemianowaną, a efektywność pracy ma wymiar jednostki pieniężnej na zatrudnionego.

niu, część dochodu przeznaczona jest na konsumpcję, a część na inwestycje, co można wyrazić za pomocą stopy inwestycji *s(t)*:

$$i(t) = s(t)\,y(t)\,, \tag{2}$$

$$c(t) = \big(1 - s(t)\big)\,y(t)\,, \tag{3}$$

gdzie $0 \le s(t) \le 1$.

Zmiana zasobu kapitału wynika z różnicy pomiędzy inwestycjami (brutto), a tą częścią kapitału, która ulega deprecjacji (ze stopą $\mu > 0$):

$$\frac{dk(t)}{dt} = i(t) - \mu k(t)\,. \tag{4}$$

W chwili początkowej t_0 jest dany $k\left(t_0\right) = k^0 > 0$, ukształtowany historycznie, początkowy poziom kapitału.

Załóżmy, że liczba ludności *l(t)* rośnie egzogenicznie, ze stałą stopą $n > 0$:

$$l(t) = l^0 e^{n\left(t - t_0\right)},$$

gdzie $l^0 = l\left(t_0\right)$ oznacza liczbę ludności w momencie początkowym t_0.

Przyjmijmy ponadto, że w każdym momencie $t \in T$ ludność aktywna zawodowo stanowi stały procent ludności ogółem:

$$z(t) = \rho l(t) = z^0 e^{n\left(t - t_0\right)},$$

gdzie $\rho \in \left(0,1\right)$ jest wskaźnikiem aktywności zawodowej ludności, $z^0 = \rho l^0$ jest liczbą zatrudnionych w momencie początkowym t_0.

Korzystając ze zdefiniowanych wcześniej wielkości *l(t)* oraz *z(t)* i wprowadzając następujące oznaczenia:

$u(t) = \dfrac{k(t)}{z(t)}$ - techniczne uzbrojenie pracy w momencie *t*,

$w(t) = \dfrac{y(t)}{z(t)}$ - dochód na zatrudnionego,

$r(t) = \dfrac{i(t)}{z(t)}$ - inwestycje na zatrudnionego,

$\gamma(t) = \dfrac{c(t)}{l(t)}$ - konsumpcja na osobę,

można układ równań (1)-(4) przekształcić do równoważnego układu:

$$w(t) = a(t)u(t) + b\,, \tag{5}$$

$$\gamma(t) = \rho\left(1 - s(t)\right) w(t), \tag{6}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \left(a(t)s(t) - n - \mu\right)u(t) + bs(t), \tag{7}$$

przy czym $u\left(t_0\right) = u^0 = \frac{k^0}{\rho l^0} > 0$ jest daną początkową wartością technicznego uzbrojenia pracy[5].

Załóżmy, że efektywność majątku produkcyjnego przyrasta w wyniku tych samych inwestycji, co on sam, zgodnie z równaniem:

$$\frac{da(t)}{dt} = \sigma s(t)^{6}. \tag{8}$$

Przyjmujemy, że parametr σ jest dodatni, a początkowa efektywność kapitału spełnia warunek $a(t_0) = a^0 > n + \mu$ [7].

Dla tak zdefiniowanej gospodarki zadanie maksymalizacji konsumpcji na zatrudnionego[8] w horyzoncie *T*, ze zmiennymi stanu *u(t)* i *a(t)* oraz sterowaniem *s(t)*, przyjmuje następującą postać:
znaleźć

$$\max \int_{t_0}^{t_1} \left(1 - s(t)\right)\left(a(t)u(t) + b\right) dt, \tag{9}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} &\frac{du(t)}{dt} = \left(a(t)s(t) - n - \mu\right)u(t) + bs(t), \\ &\frac{da(t)}{dt} = \sigma s(t), \\ &s \in \tilde{C}^0\left(T \to [0,1]\right), \\ &\left(u(t_0), a(t_0)\right) = \left(u^0, a^0\right) > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

5 Konstrukcja zaczerpnięta została z modelu wzrostu E. Panka, w: E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań 2000, s. 556-560.

6 W przypadku przeznaczania całego dochodu na inwestycje efektywność kapitału rośnie liniowo ze współczynnikiem σ.

7 Ze względu na nieujemność prawej strony równania (8), efektywność kapitału jest w całym horyzoncie większa od sumy stopy wzrostu ludności i współczynnika deprecjacji kapitału. Gwarantuje to dodatniość obu składników prawej strony równania dynamiki technicznego uzbrojenia pracy przy wysokich wartościach stopy inwestycji.

8 Z uwagi na przyjęte założenia dotyczące liczby ludności aktywnej zawodowo jest to zadanie równoważne z zadaniem maksymalizacji konsumpcji na osobę.

Rozwiązanie zadania[9]

Rozwiązaniem zadania (9)–(10) jest następujący proces $\left(s^*, u^*, a^*\right)_T$:

(A) Gdy horyzont jest długi, tzn. $|T| = t_1 - t_0 > \theta$, gdzie θ jest pewną liczbą z przedziału $\left(0, \frac{1}{n+\mu} \ln \frac{a^0}{a^0 - n - \mu}\right)$,

wtedy
$$s^*(t) = \begin{cases} 1 & dla \quad t \in [t_0, \tau), \\ 0 & dla \quad t \in [\tau, t_1], \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} \left[b \int_{t_0}^{t} e^{-g(t)} dt + u^0 e^{-\left(a^0 - n - \mu\right) t_0} \right] e^{g(t)} & dla \quad t \in [t_0, \tau), \\ u^*(\tau) e^{-(n+\mu)(t-\tau)} & dla \quad t \in [\tau, t_1), \end{cases}$$

$$a^*(t) = \begin{cases} a^0 + \sigma(t - t_0) & dla \quad t \in [t_0, \tau), \\ a^*(\tau) & dla \quad t \in [\tau, t_1), \end{cases}$$

gdzie $g(t) = \left(a^0 - n - \mu\right) t + \frac{1}{2} \sigma \left(t - t_0\right)^2$, natomiast moment τ spełnia warunek $\tau \in \left(t_1 - \frac{1}{n+\mu} \ln \frac{a^*(\tau)}{a^*(\tau) - n - \mu}, t_1\right)$.

Procesowi temu odpowiadają następujące trajektorie dochodu i inwestycji na zatrudnionego oraz konsumpcji na osobę:

[9] Rozwiązanie zadania (9)-(10) oraz zadania (16)-(17) (punkt 2) otrzymaliśmy korzystając z zespołu warunków optymalności Pontriagina, zob. np. E. Panek, op.cit., s. 405-406, A. C. Chiang, *Elementy dynamicznej optymalizacji*, Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych, Warszawa 2002, s. 170-172, O. Gedymin, *Optymalne sterowanie procesami gospodarczymi*, PWN, Warszawa 1977, s. 133-136, G. Leitmann, *Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego*, WNT, Warszawa 1971, s. 40 i 108-109.

$$w^*(t)=\begin{cases}\left[a^0+\sigma\left(t-t_0\right)\right]\left[b\int_{t_0}^{t}e^{-g(t)}dt+u^0e^{-\left(a^0-n-\mu\right)t_0}\right]e^{g(t)}+b & dla \quad t\in\left[t_0,\tau\right),\\ a^*(\tau)u^*(\tau)e^{-(n+\mu)(t-\tau)}+b & dla \quad t\in\left[\tau,t_1\right),\end{cases}$$

$$r^*(t)=\begin{cases}\left[a^0+\sigma\left(t-t_0\right)\right]\left[b\int_{t_0}^{t}e^{-g(t)}dt+u^0e^{-\left(a^0-n-\mu\right)t_0}\right]e^{g(t)}+b & dla \quad t\in\left[t_0,\tau\right),\\ 0 & dla \quad t\in\left[\tau,t_1\right),\end{cases}$$

$$\gamma^*(t)=\begin{cases}0 & dla \quad t\in\left[t_0,\tau\right),\\ \rho\left[a^*(\tau)u^*(\tau)e^{-(n+\mu)(t-\tau)}+b\right] & dla \quad t\in\left[\tau,t_1\right).\end{cases}$$

(B) Gdy horyzont jest krótki, tzn. $|T|\le\theta$, wówczas

$$s^*(t)=0,\qquad u^*(t)=u^0e^{-(n+\mu)(t-t_0)},\quad a^*(t)=a^0,$$

natomiast pozostałe trajektorie dane są wzorami:

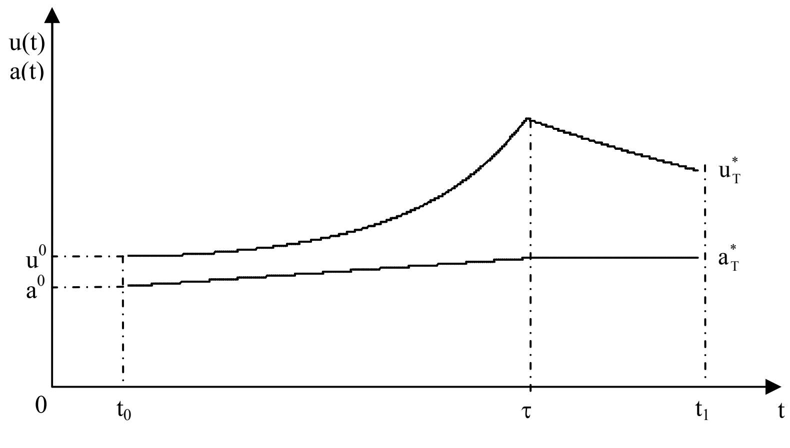
$$w^*(t)=a^0u^0e^{-(n+\mu)(t-t_0)}+b,$$

$$r^*(t)=0,$$

$$\gamma^*(t)=\rho\left[a^0u^0e^{-(n+\mu)(t-t_0)}+b\right].$$

Charakterystyka rozwiązania

Postać rozwiązania zadania (9)–(10) zależy od długości horyzontu. W długim horyzoncie wyróżnić można dwie fazy wzrostu. W pierwszej fazie cały dochód jest inwestowany, czego efektem jest liniowy wzrost efektywności majątku produkcyjnego oraz szybszy niż wykładniczy przyrost technicznego uzbrojenia pracy. Tym samym dynamicznie wzrasta dochód na zatrudnionego. Taki rozwój jest możliwy dzięki wstrzymaniu konsumpcji, która staje się dodatnia dopiero w drugiej fazie. Wtedy z kolei wstrzymane zostają wszelkie inwestycje, obserwuje się spadek dochodu na zatrudnionego, technicznego uzbrojenia pracy, a także konsumpcji na osobę, podczas gdy efektywność kapitału utrzymuje się na stałym, osiągniętym na koniec fazy inwestycyjnej, poziomie.Przy niskim technicznym uzbrojeniu pracy (poniżej poziomu $\frac{bn}{a^*(\tau)\mu}$) jest jednak możliwy wzrost dochodu i konsumpcji ogółem. Dzieje się tak, ponieważ krańcowa produktywność kapitału ulegającego deprecjacji w momencie *t* jest niższa od krańcowej wydajności pracy nowo zatrudnionej siły roboczej. Wystąpienie tego zjawiska jest jednak, wraz z wydłużaniem horyzontu, coraz mniej prawdopodobne – techniczne uzbrojenie pracy rośnie w pierwszej fazie bardzo szybko, ponadto wartość wyrażenia $\frac{bn}{a^*(\tau)\mu}$ maleje. W miarę wydłużania horyzontu faza konsumpcyjna staje się coraz krótsza ($\tau \to t_1$ przy $|T| \to +\infty$), w wyniku pochłaniania jej części przez fazę inwestycyjną. Wpływa na to, zarówno



Wykres 1. Optymalne trajektorie technicznego uzbrojenia pracy i efektywności kapitału – rozwiązanie zadania (9)-(10) w długim horyzoncie czasu

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

bezpośrednio, jak i pośrednio (poprzez inicjowanie wykładniczego wzrostu technicznego uzbrojenia pracy), zwiększająca się efektywność majątku produkcyjnego[10]. Skrócenie okresu konsumpcji rekompensowane jest więc przez znaczne zwiększenie jej rozmiarów.

W krótkim horyzoncie maksymalną wielkość konsumpcji na osobę daje proces wzrostu z zerowymi inwestycjami. Jakikolwiek rozwój potencjału produkcyjnego pozbawiony jest sensu, cały dochód przeznaczony zostaje na konsumpcję. Obserwujemy te same efekty, co w fazie konsumpcyjnej w długim horyzoncie.

2. Jednosektorowy model wzrostu z dwuczynnikową liniową funkcją produkcji i zmienną efektywnością pracy

Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem kolejnych rozważań będzie gospodarka, w której zmienia się wydajność pracy. W rozważanym w poprzednim punkcie modelu efektywność majątku produkcyjnego była, podobnie jak techniczne uzbrojenie pracy, rosnącą funkcją stopy inwestycji – obie współrzędne stanu systemu zależały w podobny sposób od sterowania. Na efektywność pracy wpływają jednak na ogół inne czynniki aniżeli na efektywność kapitału. Choć w rzeczywistości liczba tych czynników jest duża, a ich oddziaływanie bardzo złożone, w modelu zakładać będziemy jedynie, że wzrost wydajności pracy jest tym szybszy, im większa część dochodu jest konsumowana[11]. Dla uproszczenia przyjmiemy, że, przy zerowej konsumpcji, wydajność pracy nie ulega zmianie[12].

Rozważmy zatem gospodarkę, w której proces produkcji opisany jest przez dwuczynnikową, liniową funkcję produkcji:

$$y(t) = ak(t) + b(t)z(t), \tag{11}$$

gdzie *y(t)*, *k(t)*, *z(t)* oznaczają, odpowiednio, dochód, kapitał i zatrudnienie w momencie *t*, *b(t)* jest wydajnością pracy w momencie *t*, natomiast *a* jest stałym współczynnikiem efektywności majątku produkcyjnego. Podobnie jak w poprzednim przypadku, przekształcając równanie (11) do-

[10] W modelu ze stałą krańcową produktywnością czynników produkcji długość fazy konsumpcyjnej jest niezależna od długości horyzontu.

[11] Inwestycje mają na celu rozbudowę potencjału produkcyjnego, który zapewnić ma większą konsumpcję w przyszłości. Bodźcem do wzrostu wydajnej pracy dla pracownika są jednak bezpośrednie korzyści, jakie osiąga on i jego rodzina. Korzyści te najprościej mierzyć poziomem konsumpcji.

[12] W związku z tym założeniem wydajność pracy nigdy nie maleje (por. przypis 2).

chodzi się do następującego układu równań, opisującego funkcjonowanie gospodarki:

$$w(t) = au(t) + b(t), \tag{12}$$

$$\gamma(t) = \rho\big(1 - s(t)\big)\, w(t), \tag{13}$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \big(as(t) - n - \mu\big)u(t) + b(t)s(t), \qquad u\big(t_0\big) = u^0 > 0, \tag{14}$$

przy czym $a > n + \mu$. Wydajność pracy zmienia się zgodnie z równaniem:

$$\frac{db(t)}{dt} = \delta\big(1 - s(t)\big)\big(au(t) + b(t)\big), \tag{15}$$

gdzie δ jest liczbą dodatnią[13].

Przy przyjętych założeniach zadanie maksymalizacji konsumpcji na osobę[14] w horyzoncie $T = \left[t_0, t_1\right]$ przyjmuje postać:

Znaleźć

$$\max \int_{t_0}^{t_1} \big(1 - s(t)\big)\big(au(t) + b(t)\big) dt, \tag{16}$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}
&\frac{du(t)}{dt} = \big(as(t) - n - \mu\big)u(t) + b(t)s(t),\\
&\frac{db(t)}{dt} = \delta\big(1 - s(t)\big)\big(au(t) + b(t)\big),\\
&s \in \tilde{C}^0\big(T \to [0,1]\big),\\
&\big(u(t_0), b(t_0)\big) = \big(u^0, b^0\big) > 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

---

[13] Równanie (15) odpowiada wcześniejszym rozważaniom na temat wydajności pracy. Uzależnienie prawej strony wyłącznie od sterowania, podobnie jak w równaniu (8), tzn. przyjęcie, że $\frac{db(t)}{dt} = \delta\big(1 - s(t)\big)$, byłoby oczywiście równie poprawne i dopuszczalne, lecz, wbrew pozorom, skomplikowałoby znacznie analityczną postać rozwiązania, nie zmieniając jego istoty.

[14] Por. przypis 8.

Rozwiązanie zadania[15]

Rozwiązaniem zadania (16)-(17) jest następujący proces $\left(s^*,u^*,b^*\right)_T$:

(A) Gdy efektywność majątku produkcyjnego jest wysoka i jednocześnie horyzont długi, tzn. $a-n-\mu>\delta$ oraz

$$|T|>\frac{1}{\delta+n+\mu}\ln\frac{a}{a-\delta-n-\mu},$$

wówczas

$$s^*(t)=\begin{cases}1 & dla \quad t\in\left[t_0,\tau\right),\\ 0 & dla \quad t\in\left[\tau,t_1\right],\end{cases}$$

$$u^*(t)=\begin{cases}\left(u^0+C\right)e^{(a-n-\mu)(t-t_0)}-C & dla \quad t\in\left[t_0,\tau\right),\\ u^*(\tau)e^{-(n+\mu)(t-\tau)} & dla \quad t\in\left[\tau,t_1\right),\end{cases}$$

$$b^*(t)=\begin{cases}b^0 & dla \quad t\in\left[t_0,\tau\right),\\ \left(b^0+D\right)e^{\delta(t-\tau)}-De^{-(n+\mu)(t-\tau)} & dla \quad t\in\left[\tau,t_1\right),\end{cases}$$

gdzie $C=\dfrac{b^0}{a-n-\mu}$, $D=\dfrac{\delta a u^*(\tau)}{\delta+n+\mu}$

oraz $\tau=t_1-\dfrac{1}{\delta+n+\mu}\ln\dfrac{a}{a-\delta-n-\mu}$.

Procesowi temu odpowiadają następujące trajektorie dochodu i inwestycji na zatrudnionego oraz konsumpcji na osobę:

$$w^*(t)=\begin{cases}a\left[\left(u^0+C\right)e^{(a-n-\mu)(t-t_0)}-C\right]+b^0 & dla \quad t\in\left[t_0,\tau\right),\\ \dfrac{n+\mu}{\delta}De^{-(n+\mu)(t-\tau)}+\left(b^0+D\right)e^{\delta(t-\tau)} & dla \quad t\in\left[\tau,t_1\right),\end{cases}$$

$$r^*(t)=\begin{cases}a\left[\left(u^0+C\right)e^{(a-n-\mu)(t-t_0)}-C\right]+b^0 & dla \quad t\in\left[t_0,\tau\right),\\ 0 & dla \quad t\in\left[\tau,t_1\right),\end{cases}$$

[15] Zob. przypis 9.

$$\gamma^*(t) = \begin{cases} 0 & dla \quad t \in [t_0, \tau), \\ \rho\left[\dfrac{n+\mu}{\delta} D e^{-(n+\mu)(t-\tau)} + \left(b^0 + D\right) e^{\delta(t-\tau)}\right] & dla \quad t \in [\tau, t_1), \end{cases}$$

(B) Gdy efektywność majątku produkcyjnego jest niska lub gdy jest wysoka i jednocześnie horyzont krótki, tzn. gdy:

1° $\qquad a - n - \mu \le \delta$

lub

2° $\qquad a - n - \mu > \delta$ oraz $|T| \le \dfrac{1}{\delta + n + \mu} \ln \dfrac{a}{a - \delta - n - \mu}$,

wtedy

$$s^*(t) = 0, \qquad u^*(t) = u^0 e^{-(n+\mu)(t-t_0)},$$
$$b^*(t) = \left(b^0 + E\right) e^{\delta(t-t_0)} - E e^{-(n+\mu)(t-t_0)},$$

gdzie $E = \dfrac{\delta a u^0}{\delta + n + \mu}$.

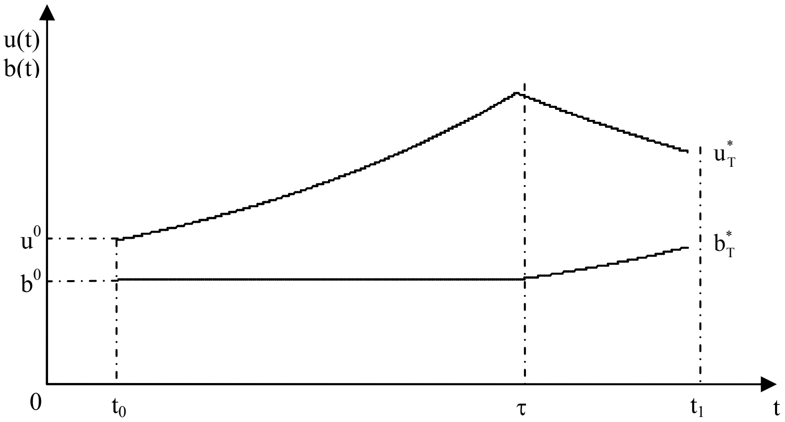
Pozostałe trajektorie dane są wówczas równaniami:

$$w^*(t) = \frac{n+\mu}{\delta} E e^{-(n+\mu)(t-t_0)} + \left(b^0 + E\right) e^{\delta(t-t_0)},$$
$$r^*(t) = 0,$$
$$w^*(t) = \rho\left[\frac{n+\mu}{\delta} E e^{-(n+\mu)(t-t_0)} + \left(b^0 + E\right) e^{\delta(t-t_0)}\right].$$

Charakterystyka rozwiązania

Rozwiązanie zadania (16)–(17) zależy zarówno od długości horyzontu, jak i od krańcowej produktywności kapitału. Przy niskim jej poziomie nie warto inwestować w kapitał, a maksymalizacja konsumpcji na osobę następuje poprzez konsumowanie dochodu w całym horyzoncie. W tym czasie techniczne uzbrojenie pracy maleje (ze stopą $n + \mu$), rośnie natomiast wydajność pracy – stopa wzrostu jest malejąca, lecz zawsze większa od δ. W zależności od siły zmian tych wielkości dochód może wzrastać lub maleć. Aby trajektoria dochodu była rosnąca, niezależnie od wartości początkowych, wystarczy, że parametr δ będzie przynajmniej równy sumie n i μ.

Identyczne jest rozwiązanie w warunkach wysokiej efektywności kapitału, w krótkim horyzoncie. Gdy horyzont jest dostatecznie długi, w procesie optymalnym wyróżnić można dwie fazy. W pierwszej fazie cały wytworzony dochód jest inwestowany. Towarzyszy temu szybki przyrost technicznego uzbrojenia pracy z malejącą stopą (zawsze jednak wyższą niż $a - n - \mu$), podczas gdy wydajność pracy utrzymuje się na poziomie początkowym. Druga faza, konsumpcyjna, przypomina rozwiązanie w krótkim horyzoncie – poziom początkowy technicznego uzbrojenia pracy oraz dochodu na zatrudnionego jest jednak wyższy, w wyniku rozwoju osiągniętego w fazie pierwszej. Możliwość wzrostu konsumpcji na osobę (dochodu na zatrudnionego) jest nieco mniejsza, z uwagi na większą wartość kapitału ulegającego deprecjacji. Dalsze wydłużanie horyzontu nie ma wpływu na czas trwania fazy konsumpcyjnej, wydłużeniu ulega jedynie faza inwestycyjna.



Wykres 2. Optymalne trajektorie technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy – rozwiązanie zadania (16)–(17) w przypadku długiego horyzontu i wysokiej krańcowej efektywności kapitału

Ź r ó d ł o: opracowanie własne

Rozwiązanie zadania pokazuje, że majątek produkcyjny nie stanowi jedynego wyznacznika potencjału gospodarczego. Nawet przy zerowych inwestycjach, przy kurczącym się zasobie kapitału, możliwy jest wzrost produkcji na zatrudnionego[16], dzięki zwiększającej się wydajności pracy.

Podsumowanie

Przedstawione rozwiązania optymalne zadań (9)–(10) oraz (16)–(17) ilustrują kilka niezwykle istotnych zasad gospodarowania, przede wszystkim ukazują korzyści, jakie płyną z czasowego zmniejszenia konsumpcji w celu rozbudowania potencjału wytwórczego. Należy jednak z naciskiem podkreślić, że są to rozwiązania zadań, wynikające z przyjętych założeń o funkcjonowaniu gospodarki, których nie da się do końca zaakceptować w realnej ekonomii. W rzeczywistości niemożliwe jest całkowite wstrzymanie konsumpcji ani inwestycji. Nie jest do zrealizowania również nagły skok poziomu inwestycji i konsumpcji przy przejściu od fazy inwestycyjnej do konsumpcyjnej. Wątpliwości budzi też spadające w konsumpcyjnej fazie wzrostu techniczne uzbrojenie pracy, co wprawdzie spotykane jest w realnych gospodarkach, nie jest natomiast pożądane.

Problem zerowych inwestycji i konsumpcji można łatwo rozwiązać uwzględniając w modelach inwestycje oraz konsumpcję autonomiczną[17], nie komplikując przy tym rozwiązania. Istotniejszą wadą jest gwałtowne przejście od fazy inwestycyjnej do konsumpcyjnej. Skok wynika z założeń o zmiennej sterującej[18], od której w teorii sterowania wymaga się ciągłości przedziałowej[19]. Usunięcie tej niedoskonałości rozwiązania wiąże się już z koniecznością przeformułowania modelu i wyborem innej zmiennej sterującej[20]. W literaturze znaleźć można także modele, w których podział dochodu gwarantuje niemalejące techniczne uzbrojenie pracy[21].

---

[16] Rozwiązania zadania (9)–(10) pokazało już, że przy zerowych inwestycjach możliwy jest wzrost dochodu ogółem. Takie zjawisko występowało jednak tylko w warunkach niskiego technicznego uzbrojenia pracy.

[17] Wystarczyłoby ograniczyć zbiór sterowań dopuszczalnych do pewnego spójnego podzbioru przedziału [0,1].

[18] W naszych modelach była nią stopa inwestycji *s(t)*.

[19] Możliwość nieciągłości trajektorii konsumpcji i inwestycji wynika natychmiast z równań (2) i (3).

[20] Prosty przykład modyfikacji modelu znaleźć można w: E. Panek, op.cit., s. 443-444.

[21] Ibidem, s. 581-585.

Choć rozbudowa modelu zwykle przybliża go do rzeczywistości, podnosi jednocześnie poziom jego złożoności matematycznej, co prowadzi do zmniejszenia przejrzystości, a często również utrudnia lub wręcz uniemożliwia, znalezienie rozwiązania analitycznego. Z tej m.in. przyczyny w rozpatrywanych w pracy modelach przyjęliśmy wiele założeń upraszczających, np. każdorazowo zakładaliśmy wzrost krańcowej produktywności tylko jednego z czynników produkcji. Jednoczesne uwzględnienie wzrostu wydajności obu czynników jest naturalnym rozwinięciem modelu, ale powoduje natychmiast zwiększenie wymiaru rozpatrywanej przestrzeni stanów. Rozszerzenia wymaga interpretacja drugiego czynnika, tj. pracy, który we współczesnych badaniach postrzegany jest raczej przez pryzmat kwalifikacji i wiedzy, a nie samej liczby zatrudnionych czy roboczogodzin, i traktowany jako drugi, obok rzeczowego, rodzaj kapitału. Specyfika jego 'produkcji' powoduje konieczność wyjścia poza neoklasyczne modele wzrostu[22].

Summary

In the *Optimal growth processes in a two-factor one-sector economy with a linear production function and varying factors productivity* the author presents two models of economy as optimal control problems over a finite horizon. The fundamental feature of the economies is that in each moment income is divided between investment and consumption. The more is invested, the faster the physical capital grows while maximizing consumption per capita over the horizon is the optimality criterion. What makes the two models different is selection of a factor productivity of which may vary in time. Productivity of the other factor is assumed to be constant.

The optimal process is in both cases found with the use of the Pontryagin maximum principle, then major properties are elaborated on. Although the solutions cannot be accepted in terms of real economy (mainly because of non-continuous investment and consumption trajectories as well as their value set to zero over a period of time), they highlight

[22] Zob. R. J. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic growth*, McGraw-Hill Inc., 1995, p. 179-201, D. Romer, *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa 2000, s. 117-163, P. Pońsko, *Optymalizacja dynamiczna wzrostu gospodarczego*, WSHiFM, Warszawa 2000, s. 71-80.

a basic rule of income division which can be formulated in a simple way: *First invest, then consume*.

Bibliografia

Barro R. J., Sala-i-Martin X. [1995], *Economic growth*, McGraw-Hill Inc.

Chiang A. C. [2002], *Elementy dynamicznej optymalizacji*, Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych, Warszawa.

Gedymin O. [1977], *Optymalne sterowanie procesami gospodarczymi*, PWN, Warszawa.

Leitmann G. [1971], *Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego*, WNT, Warszawa.

Panek E. [2000], *Ekonomia matematyczna*, Akademia Ekonomiczna w Poznaniu, Poznań.

Pońsko P. [2000], *Optymalizacja dynamiczna wzrostu gospodarczego*, Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych, Warszawa.

Romer D. [2000], *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa.